



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Matematyka w liceum



$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$



spis treści
symbole
zgłoś błąd
13 kwiecień



matma235@o2.pl

Spis treści:

- Podstawy
- Funkcja i jej własności
- Funkcja kwadratowa
- Wielomiany
- Funkcje wymierne
- Funkcja wykładnicza
- Logarytmy
- Ciągi i ich granice
- Granica i pochodna funkcji
- Trygonometria
- Planimetria
- MATURA

za duża czcionka?

Ten ebook jest z 13 kwietnia 2006r.

Najnowsza wersja: www.matma.boo.pl

www.matma235.prv.pl

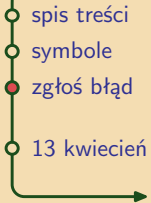
kontakt z autorem: matma235@o2.pl
copyright

13 kwiecień 2006r.

wzory, twierdzenia, definicje

- zbiory liczbowe
- przedziały liczbowe
- działania na przedziałach
- wartość bezwzględna
- potęgowanie
- wzory skróconego mnożenia
- rysowanie wektorów

przykłady

- 
- o spisy treści
 - o symbole
 - o zgłosz błęd
 - o 13 kwiecień





▷ Dla przedziałów $A = (-3, 2)$ i $B = (1, 4)$ wyznacz $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, A' , B' .

spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl



spis treści

symbole

zgłoś błąd

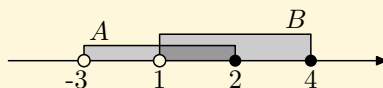
13 kwiecień



matma235@o2.pl

Dla przedziałów $A = (-3, 2)$ i $B = (1, 4)$ wyznacz $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, A' , B' .

Zaznaczamy **przedziały** na osi liczbowej i odczytujemy rozwiązanie:



suma: $A \cup B = (-3, 4)$

część wspólna: $A \cap B = (1, 2)$

różnica: $A \setminus B = (-3, 1)$

różnica: $B \setminus A = (2, 4)$

dopełnienie: $A' = (-\infty, -3) \cup (2, \infty)$

dopełnienie: $B' = (-\infty, 1) \cup (4, \infty)$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

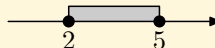


matma235@o2.pl

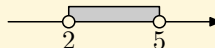
Przedziały liczbowe

Przykłady:

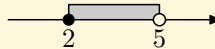
$\langle 2, 5 \rangle$ Przedział **obustronnie domknięty**, zawiera liczby od 2 do 5.



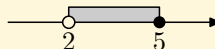
$(2, 5)$ Przedział **obustronnie otwarty**, zawiera liczby od 2 do 5, bez 2 i 5.



$\langle 2, 5)$ Przedział **lewostronnie domknięty**, zawiera liczby od 2 do 5, bez 5.

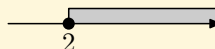


$(2, 5]$ Przedział **prawostronnie domknięty**, zawiera liczby od 2 do 5, bez 2.

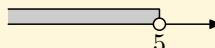


Nawiasy przy ∞ zawsze okrągłe

$\langle 2, \infty)$ Przedział **lewostronnie domknięty**, zawiera liczby większe lub równe 2.



$(-\infty, 5)$ Przedział **prawostronnie otwarty**, zawiera liczby mniejsze od 5.



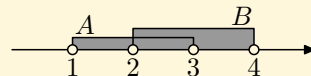
Działania na przedziałach

suma: $A \cup B$

Suma przedziałów A i B to przedział zawierający **wszystkie** liczby z przedziałów A i B .

Przykład:

$$A = (1, 3) \quad B = (2, 4) \quad A \cup B = (1, 4)$$

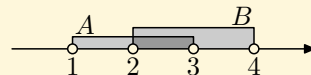


część wspólna (iloczyn): $A \cap B$

Część wspólna przedziałów A i B to przedział zawierający liczby **wspólne** dla przedziałów A i B .

Przykład:

$$A = (1, 3) \quad B = (2, 4) \quad A \cap B = (2, 3)$$

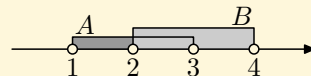


Różnica: $A \setminus B$

Różnica przedziałów A i B to przedział zawierający liczby należące do przedziału A , ale **nie** należące do przedziału B .

Przykład:

$$A = (1, 3) \quad B = (2, 4) \quad A \setminus B = (1, 2)$$

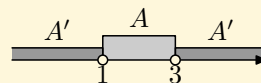


Dopełnienie: A'

Dopełnienie przedziału A to przedział lub suma przedziałów zawierająca liczby, które **nie** należą do przedziału A .

Przykład:

$$A = (1, 3) \quad A' = (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$$



- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień





Równania i nierówności z wartością bezwzględną

Rozwiąż równania:

$$\triangleright |x| = 3$$

$$\triangleright |x + 1| = 2$$

$$\triangleright |x - 3| = 0$$

$$\triangleright |x + 4| = -5$$

$$\triangleright \sqrt{(x + 5)^2} = 4$$

Rozwiąż nierówności:

$$\triangleright |x| < 3$$

$$\triangleright |x - 4| < 2$$

$$\triangleright |8 - 2x| \leq 4$$

$$\triangleright |x| > 2$$

$$\triangleright |2x - 6| \geq 4$$

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień





Rozwiąż równanie:

$$|x| = 3$$

Wartość bezwzględna z -3 i 3 jest równa 3 , a więc:

$$x = -3 \quad \text{lub} \quad x = 3$$



Rozwiąż równanie:

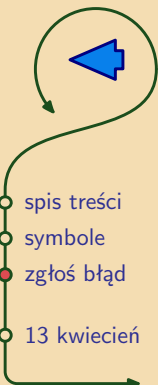
$$|x + 1| = 2$$

Wartość bezwzględna z -2 i 2 jest równa 2 , a więc:

$$x + 1 = -2 \quad \text{lub} \quad x + 1 = 2$$

$$x = -2 - 1 \quad \quad \quad x = 2 - 1$$

$$x = -3 \quad \quad \quad x = 1$$

- 
- spis treści
 - symbole
 - zgłoś błąd
 - 13 kwiecień



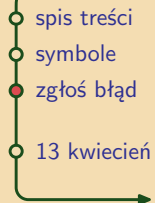
Rozwiąż równanie:

$$|x - 3| = 0$$

Wartość bezwzględna tylko z 0 jest równa 0, a więc:

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

- 
- spis treści
 - symbole
 - zgłoś błąd
 - 13 kwiecień



matma235@o2.pl

Rozwiąż równanie:

$$|x + 4| = -5$$

Wartość bezwzględna nie może być ujemna, a więc równanie nie ma rozwiązania.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Rozwiąż równanie:

$$\sqrt{(x+5)^2} = 4$$

Zgodnie ze wzorem $\sqrt{x^2} = |x|$ możemy napisać $\sqrt{(x+5)^2} = |x+5|$.

$$|x+5| = 4$$

Wartość bezwzględna z -4 i 4 jest równa 4 , a więc:

$$\begin{array}{ll} x+5 = -4 & \text{lub} & x+5 = 4 \\ x = -4-5 & & x = 4-5 \\ x = -9 & & x = -1 \end{array}$$



Wartość bezwzględna

Wartość bezwzględna z dowolnej liczby jest dodatnia lub równa zero.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{gdy } x \geq 0 \\ -x & \text{gdy } x < 0 \end{cases} \quad |x| = \sqrt{x^2}$$

Przykłady:

$$|4| = 4 \quad |-4| = 4 \quad |0| = 0$$

$$|-5| = 5 \quad \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



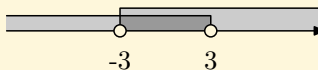
matma235@o2.pl

Rozwiąż nierówność:

$$|x| < 3$$

Nierówność z wartością bezwzględną można zastąpić układem nierówności bez wartości bezwzględnej.

$$x < 3 \quad \text{ i } \quad x > -3$$



Rozwiązaniem jest część wspólna przedziałów:

$$x \in (-3, 3)$$

Rozwiąż nierówność:

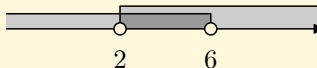
$$|x - 4| < 2$$

Nierówność z wartością bezwzględną można zastąpić układem nierówności bez wartości bezwzględnej.

$$x - 4 < 2 \quad \vee \quad x - 4 > -2$$

$$x < 2 + 4 \quad x > -2 + 4$$

$$x < 6 \quad x > 2$$



Rozwiązaniem jest część wspólna przedziałów:

$$x \in (2, 6)$$



Rozwiąż nierówność:

$$|8 - 2x| \leq 4$$

Nierówność z wartością bezwzględną można zastąpić układem nierówności bez wartości bezwzględnej.

$$8 - 2x \leq 4$$

$$\text{ i } 8 - 2x \geq -4$$

$$-2x \leq 4 - 8$$

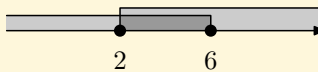
$$-2x \geq -4 - 8$$

$$-2x \leq -4 \text{ } / : (-2)$$

$$-2x \geq -12 \text{ } / : (-2)$$

$$x \geq 2$$

$$x \leq 6$$



Rozwiązaniem jest część wspólna przedziałów:

$$x \in \langle 2, 6 \rangle$$





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



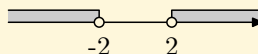
matma235@o2.pl

Rozwiąż nierówność:

$$|x| > 2$$

Nierówność z wartością bezwzględną można zastąpić układem nierówności bez wartości bezwzględnej.

$$x > 2 \quad \text{lub} \quad x < -2$$



Rozwiązaniem jest suma przedziałów:

$$x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$$

spis treści
symbole
zgłoś błąd
13 kwiecień



matma235@o2.pl

Rozwiąż nierówność:

$$|2x - 6| \geq 4$$

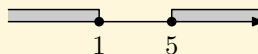
Nierówność z wartością bezwzględną można zastąpić układem nierówności bezwzględnej.

$$2x - 6 \geq 4 \quad \text{lub} \quad 2x - 6 \leq -4$$

$$2x \geq 4 + 6 \quad 2x \leq -4 + 6$$

$$2x \geq 10 : 2 \quad 2x \leq 2 : 2$$

$$x \geq 5 \quad x \leq 1$$



Rozwiązaniem jest suma przedziałów:

$$x \in (-\infty, 1) \cup \langle 5, \infty)$$

Definicja funkcji

Funkcja $f : X \rightarrow Y$ to przyporządkowanie, które każdemu elementowi zbioru X przyporządkowuje dokładnie jeden element ze zbioru Y .

x - argumenty (liczby należące do X)

y - wartości (liczby należące do Y)

Funkcję przedstawiamy najczęściej za pomocą wzoru lub wykresu.

Możliwe zapisy wzoru funkcji:

$$y = x^2 \quad f(x) = x^2$$



Dziedzina funkcji

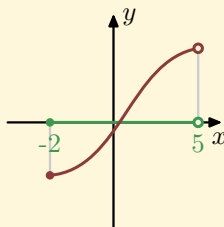
Dziedzina funkcji to zbiór zawierający wszystkie liczby, które możemy podstawić do wzoru funkcji. Możemy ją też odczytać z wykresu funkcji.

Oznaczenia: D D_f X

Przykłady:

$y = \sqrt{x}$ $D = \langle 0, \infty \rangle$, ponieważ nie można pierwiastkować liczb ujemnych.

$y = \frac{1}{x}$ $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, ponieważ nie można dzielić przez 0 ($\frac{1}{x} = 1 : x$).



$$D = \langle -2, 5 \rangle$$



Symbole matematyczne

$$x \in \langle 0, \infty \rangle$$

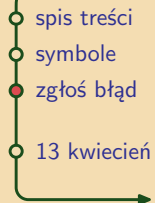
x należy do przedziału $\langle 0, \infty \rangle$

$\mathbf{R}$

liczby rzeczywiste, czyli wszystkie jakie znasz

$$x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

x należy do liczb rzeczywistych oprócz 0.

- 
- spis treści
 - symbole
 - zgłoś błąd
 - 13 kwiecień



Zbiór wartości (przeciwdziedzina)

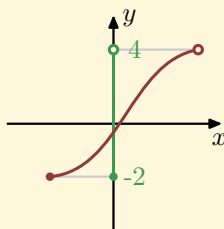
Zbiór **wartości** to zbiór zawierający wszystkie liczby, które możemy otrzymać ze wzoru funkcji. Możemy go też odczytać z wykresu funkcji.

Oznaczenia: D^{-1} Y W_f

Przykłady:

$y = x^2$ $D^{-1} : y \in \langle 0, \infty \rangle$, ponieważ podnosząc do kwadratu otrzymujemy liczby nieujemne.

$y = x + 1$ $D^{-1} : y \in \mathbf{R}$, ponieważ możemy otrzymać dowolną liczbę wstawiając odpowiednią za x .



$$D : y \in \langle -2, 4 \rangle$$



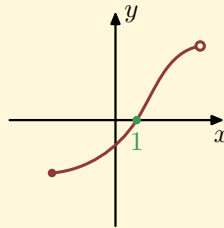
Miejsce zerowe

Miejsce zerowe to liczba, która podstawiona do wzoru **funkcji** daje wartość równą 0. Miejsce zerowe możemy też odczytać z wykresu funkcji.

Przykłady:

$$y = x + 2 \quad x_0 = -2, \text{ ponieważ podstawiając } -2 \text{ za } x \text{ otrzymujemy } 0.$$

$$y = 2x - 6 \quad x_0 = 3, \text{ ponieważ podstawiając } 3 \text{ za } x \text{ otrzymujemy } 0.$$



$$x_0 = 1$$

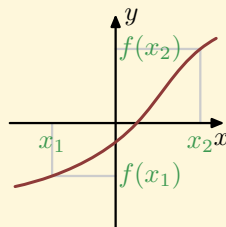


Monotoniczność

Monotoniczność oznacza najczęściej, że funkcja jest rosnąca, malejąca lub stała.

Przykłady:

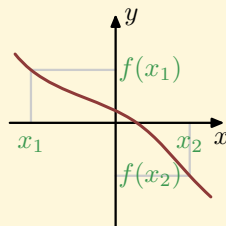
Funkcja
rosnąca:



Definicja

Dla każdego $x_1 < x_2$: $f(x_1) < f(x_2)$

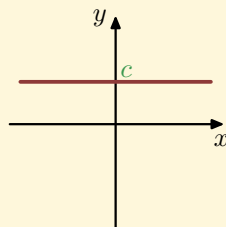
Funkcja
malejąca:



Definicja

Dla każdego $x_1 < x_2$: $f(x_1) > f(x_2)$

Funkcja
stała:



Definicja

Dla każdego x : $f(x) = c$





spis treści

symbole

zgłoś błąd

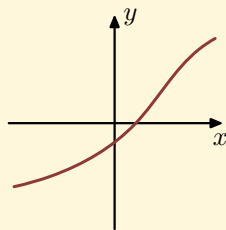
13 kwiecień



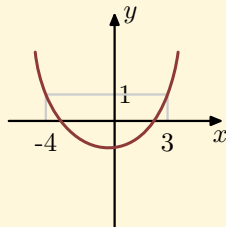
Różnowartościowość

Funkcja jest różnowartościowa, jeżeli nie ma takich dwóch liczb, dla których **wartość** funkcji wynosi tyle samo.

Przykłady:



funkcja różnowartościowa



funkcja nie jest różnowartościowa, ponieważ dla -4 i 3 wartość wynosi tyle samo.

Wzory, definicje, twierdzenia:

- Podstawy
- Funkcja kwadratowa
- Wielomiany
- Funkcje wymierne
- Funkcja wykładnicza
- Logarytmy
- Ciągi i ich granice
- Granica i pochodna funkcji
- Trygonometria

spis treści
symbole
zgłoś błąd
13 kwiecień



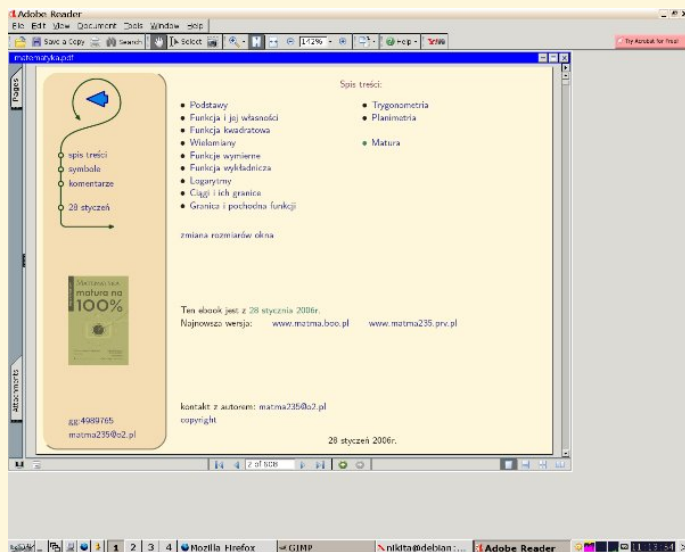
matma235@o2.pl



spis treści
symbole
zgłoś błąd
13 kwiecień



Jeżeli czcionka wydaje ci się zbyt duża, zmień rozmiar okna. Kliknij w prawym górnym rogu i wskaźnikiem myszki przeciągnij prawy dolny róg. Wraz z rozmiarem okna zmienisz rozmiar tekstu.



matma235@o2.pl



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

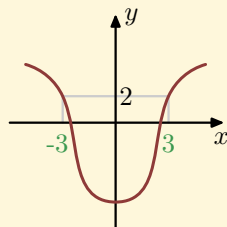


matma235@o2.pl

Parzystość i nieparzystość

Funkcja jest **parzysta**, jeżeli dla dowolnych liczb przeciwnych **wartość** funkcji wynosi tyle samo. Lewa strona wykresu jest odbiciem prawej.

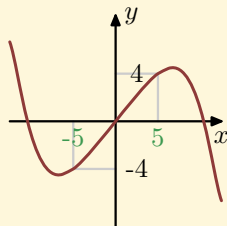
$$f(-x) = f(x)$$



Funkcja parzysta, ponieważ dla liczb przeciwnych (np $-3, 3$) wartość wynosi tyle samo.

Funkcja jest **nieparzysta**, jeżeli dla dowolnych liczb przeciwnych wartości funkcji są też przeciwnne. Lewa strona wykresu jest odwróconym odbiciem prawej.

$$f(-x) = -f(x)$$



Funkcja nieparzysta, ponieważ dla liczb przeciwnych (np $-5, 5$) wartości też są przeciwnne.

dalej

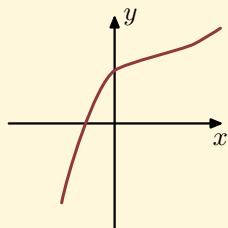


spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Funkcja nie jest ani **parzysta**, ani **nieparzysta**.
Tak jest z większością funkcji.



matma235@o2.pl



spis treści

symbole

zgłoś błąd

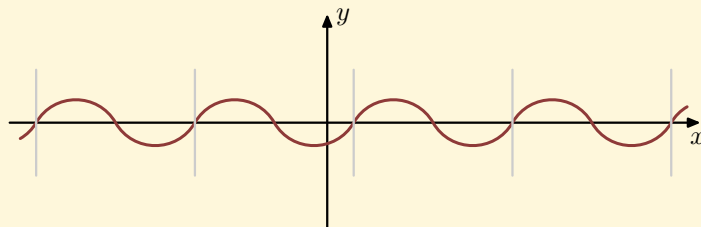
13 kwiecień



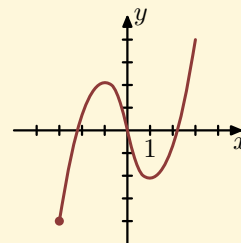
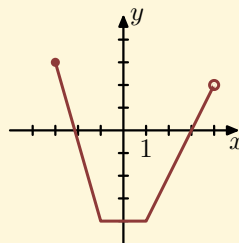
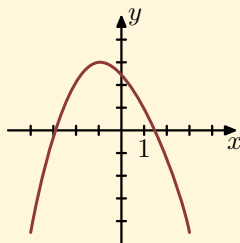
matma235@o2.pl

Okresowość funkcji

Funkcja jest okresowa, jeżeli jej wykres da się podzielić na nieskończenie wiele identycznych części.



Okres funkcji - długość jednej części na jakie został podzielony wykres.



Dla powyższych funkcji określ dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, monotoniczność, różnowartościowość, parzystość, okresowość.





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Znajdź dziedzinę funkcji.

$$f(x) = \sqrt{3x + 9}$$

Rozwiązanie:

Wyznaczamy **dziedzinę** wiedząc, że liczb ujemnych nie możemy pierwiastkować.

$$3x + 9 \geq 0$$

$$3x \geq -9 \quad / : 3$$

$$x \geq -3$$

Odp. $D = \langle -3, \infty \rangle$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Znajdź dziedzinę funkcji.

$$f(x) = \sqrt{4 - 2x}$$

Rozwiązanie:

Wyznaczamy **dziedzinę** wiedząc, że liczby ujemnych nie możemy pierwiastkować.

$$4 - 2x \geq 0$$

$$-2x \geq -4 \quad / : (-2)$$

$$x \leq 2$$

Odp. $D = (\infty, 2]$

matma235@o2.pl



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Znajdź dziedzinę funkcji.

$$f(x) = \frac{5}{2x + 6}$$

Rozwiązanie:

dziedzina funkcji

Mianownik nie może być równy 0, ponieważ nie wolno dzielić przez 0.

$$2x + 6 = 0$$

$$2x = -6 \quad / : 2$$

$$x = -3$$

Odp. $D = \mathbf{R} \setminus \{-3\}$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Znajdź dziedzinę funkcji.

$$f(x) = \frac{4}{x(x+3)}$$

Rozwiązanie:

dziedzina funkcji

Mianownik nie może być równy 0, ponieważ nie wolno dzielić przez 0.

$$\begin{aligned}x(x+3) &= 0 \\x = 0 \quad \text{lub} \quad x+3 &= 0 \\x &= -3\end{aligned}$$

Odp. $D = \mathbf{R} \setminus \{0, -3\}$



spis treści

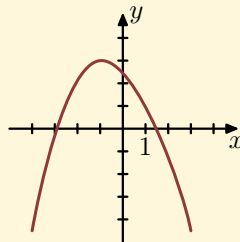
symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl



Rozwiązanie:

dziedzina

zbiór wartości

miejsce zerowe

monotoniczność

różnowartościowość

parzystość

okresowość

$$D = \mathbb{R}$$

$$D^{-1} : y \in (-\infty, 3)$$

$$x_0 \approx -3 \text{ lub } x_0 \approx 1,5$$

funkcja jest przedziałami monotoniczna

rosnąca dla $x \in (-\infty, -1)$

malejąca dla $x \in (-1, -\infty)$

funkcja nie jest różnowartościowa

funkcja nie jest ani parzysta ani nieparzysta

funkcja nie jest okresowa

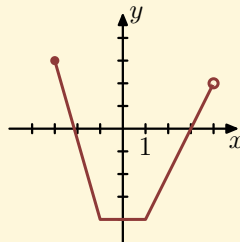


spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Rozwiązanie:

dziedzina

zbiór wartości

miejsce zerowe

monotoniczność

$$D = \langle -3, 4 \rangle$$

$$D^{-1} : y \in \langle -4, 3 \rangle$$

$$x_0 = -2 \text{ lub } x_0 = 3$$

funkcja jest przedziałami monotoniczna

malejąca dla $x \in \langle -3, -1 \rangle$

stała dla $x \in \langle -1, 1 \rangle$

rosnąca dla $x \in \langle 1, 4 \rangle$

funkcja nie jest różnowartościowa

funkcja nie jest ani parzysta ani nieparzysta

funkcja nie jest okresowa

różnowartościowość

parzystość

okresowość

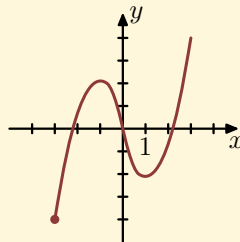


spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Rozwiązanie:

dziedzina

zbiór wartości

miejsce zerowe

monotoniczność

$$D = \langle -3, \infty \rangle$$

$$D^{-1} : y \in \langle -4, \infty \rangle$$

$x_0 \approx -2,1$ lub $x_0 = 0$ lub $x_0 \approx 2,1$

funkcja jest przedziałami monotoniczna

rosnąca dla $x \in \langle -3, -1 \rangle$

malejąca dla $x \in \langle -1, 1 \rangle$

rosnąca dla $x \in \langle 1, \infty \rangle$

funkcja nie jest różnowartościowa

funkcja nie jest ani parzysta ani nieparzysta

funkcja nie jest okresowa

różnowartościowość

parzystość

okresowość



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

Funkcja liniowa

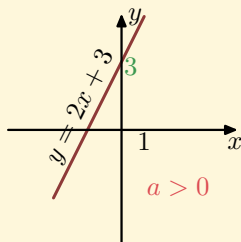
Funkcja liniowa to funkcja dana wzorem

$$y = ax + b$$

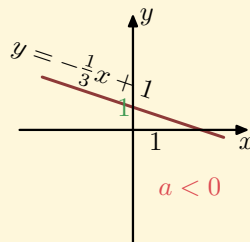
a – współczynnik kierunkowy

b – współrzędna punktu przecięcia z osią OY

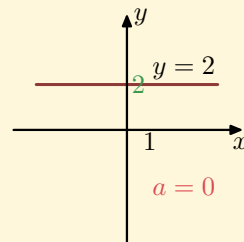
Wykres funkcji liniowej:



rosnąca



malejąca



stała





spis treści

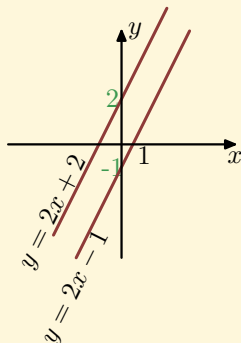
symbole

zgłoś błąd

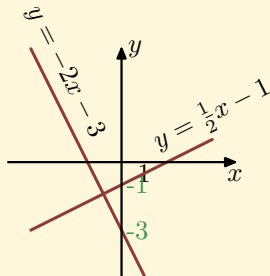
13 kwiecień



Proste równoległe i prostopadłe



Proste **równoległe** mają ten sam **współczynnik kierunkowy**.



Proste **prostopadłe** mają **współczynniki kierunkowe** spełniające wzór:

$$a_1 \cdot a_2 = -1$$

$$\text{np. } -2 \cdot \frac{1}{2} = -1$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



▷ Dla funkcji

$$y = 3x - 2$$

narysuj wykres, podaj dziedzinę, zbiór wartości, miejsce zerowe, monotoniczność.

▷ Znajdź równanie funkcji, której wykres jest równoległy do $y = 2x + 4$ i przechodzi przez punkt $A(3, 7)$.

▷ Znajdź równanie funkcji, której wykres jest prostopadły do $y = 3x - 2$ i przechodzi przez punkt $A(6, 3)$.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Dla funkcji

$$y = 3x - 2$$

narysuj wykres, podaj dziedzinę, zbiór wartości, miejsce zerowe, monotoniczność.

Rozwiązanie:

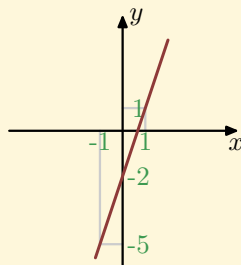
Dla wybranych dowolnie x np. $-1, 0, 1$ liczymy y :

$$x = -1 \quad y = 3 \cdot (-1) - 2 = -3 - 2 = -5$$

$$x = 0 \quad y = 3 \cdot 0 - 2 = -2$$

$$x = 1 \quad y = 3 \cdot 1 - 2 = 1$$

x	-1	0	1
y	-5	-2	1



dziedzina

$$D = \mathbf{R}$$

zbiór wartości

$$D^{-1} = \mathbf{R}$$

Miejsce zerowe liczymy wstawiając 0 za y .

$$0 = 3x - 2$$

$$-3x = -2 / : (-3)$$

$$x_0 = \frac{2}{3}$$

monotoniczność

funkcja jest rosnąca



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Znajdź równanie funkcji, której wykres jest równoległy do $y = 2x + 4$ i przechodzi przez punkt $A(3, 7)$.

Rozwiązanie:

$$y = ax + b$$

Musimy znaleźć a i b .

$a = 2$, ponieważ szukana funkcja jest równoległa do $y = 2x + 4$.

$$y = 2x + b$$

Wstawiając do równania współrzędne $A(3, 7)$ znajdujemy b .

$$7 = 2 \cdot 3 + b$$

$$7 - 6 = b$$

$$b = 1$$

Odp. $y = 2x + 1$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Znajdź równanie funkcji, której wykres jest prostopadły do $y = 3x - 2$ i przechodzi przez punkt $A(6, 3)$.

Rozwiązanie:

$$y = ax + b$$

Musimy znaleźć a i b .

Współczynnik kierunkowy a liczymy ze wzoru.

$$a_1 \cdot a_2 = -1$$

$$3 \cdot a = -1 / : 3$$

$$a = -\frac{1}{3}$$

$$y = -\frac{1}{3}x + b$$

Wstawiając do równania współrzędne punktu $A(6, 3)$ znajdujemy b .

$$3 = -\frac{1}{3} \cdot 6 + b$$

$$3 = -2 + b$$

$$3 + 2 = b$$

$$b = 5$$

Odp. $y = -\frac{1}{3}x + 5$

Rysowanie wektorów

Wektor rysujemy w postaci strzałki.

$$\vec{w} = [a, b]$$

Rysowanie wektora:

Zaznaczamy początek w dowolnym miejscu. Na podstawie współrzędnych $[a, b]$ znajdujemy koniec.

Przykłady:

$$[2, 3]$$



2 w prawo 3 do góry

$$[3, 1]$$



3 w prawo 1 do góry

$$[-2, 1]$$



2 w lewo 1 do góry

$$[3, -2]$$



3 w prawo 2 do dołu

$$[0, 2]$$



2 do góry

$$[-3, 0]$$



3 w lewo

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień



Wykres funkcji

$$f(x - a) + b$$

otrzymujemy przez narysowanie funkcji $f(x)$ i przesunięciu jej o wektor $[a, b]$.

Przykłady:

$y = x - 3 + 2$	rysujemy $y = x $ i przesuwamy o wektor $[3, 2]$
$y = (x - 2)^2 - 4$	$y = x^2$ $[2, -4]$
$y = (x + 1)^3 + 2$	$y = x^3$ $[-1, 2]$
$y = (x + 5)^2 - 3$	$y = x^2$ $[-5, -3]$
$y = x^2 + 1$	$y = x^2$ $[0, 1]$
$y = (x - 2)^2$	$y = x^2$ $[2, 0]$
$y = \frac{2}{x+3} - 1$	$y = \frac{2}{x}$ $[-3, -1]$

Pierwsza współrzędna wektora ma przeciwny znak niż liczba przy x , **druga** współrzędna ma znak taki sam jak liczba na końcu.

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Narysuj wykres funkcji:

$$\triangleright y = (x - 2)^2 + 1$$

$$\triangleright y = |x - 3| + 2$$

$$\triangleright y = (x + 4)^3$$

$$\triangleright y = \frac{1}{x+1} - 2$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

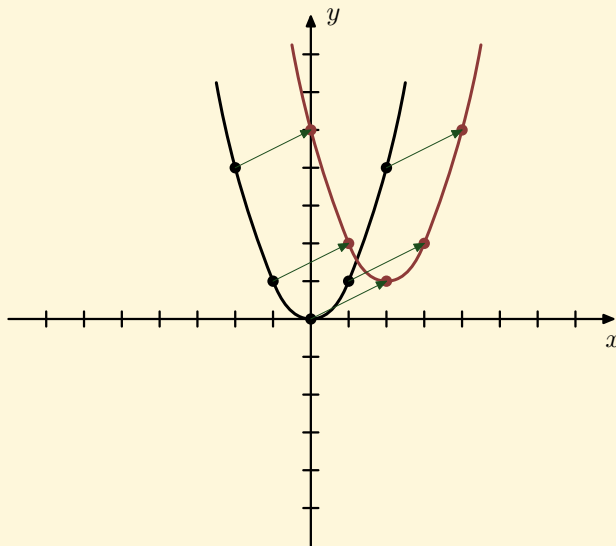
Narysuj wykres funkcji:

$$y = (x - 2)^2 + 1$$

Rozwiązanie:

Wykres $y = (x - 2)^2 + 1$ otrzymujemy przez przesunięcie $y = x^2$ o wektor $[2, 1]$.

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4





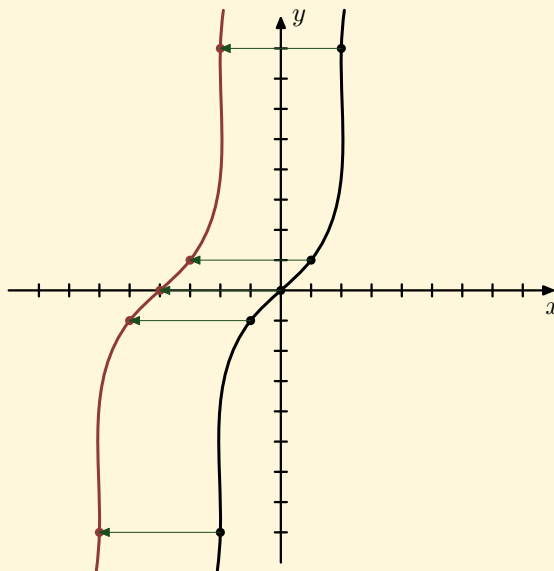
Narysuj wykres funkcji:

$$y = (x + 4)^3$$

Rozwiązanie:

Wykres $y = (x + 4)^3$ otrzymujemy przez przesunięcie $y = x^3$ o wektor $[-4, 0]$.

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^3$	-8	-1	0	1	8





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

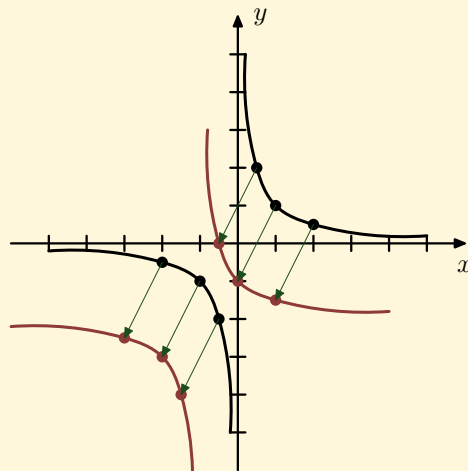
Narysuj wykres funkcji:

$$y = \frac{1}{x+1} - 2$$

Rozwiązanie:

Wykres $y = \frac{1}{x+1} - 2$ otrzymujemy przez przesunięcie $y = \frac{1}{x}$ o wektor $[-1, -2]$.

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$y = \frac{1}{x}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	2	1	$\frac{1}{2}$





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

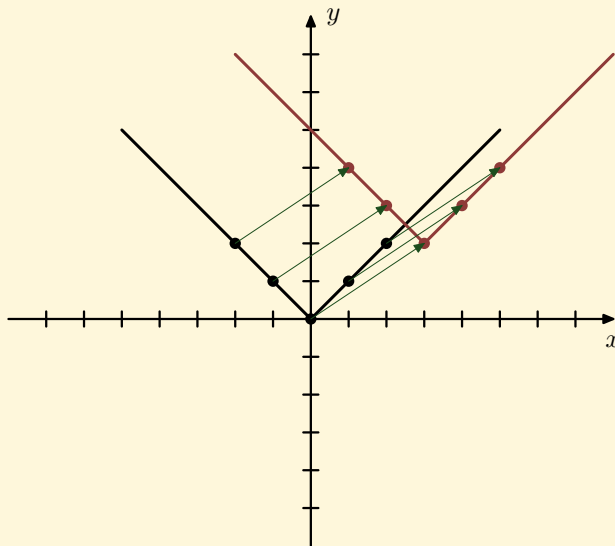
Narysuj wykres funkcji:

$$y = |x - 3| + 2$$

Rozwiązanie:

Wykres $y = |x - 3| + 2$ otrzymujemy przez przesunięcie $y = |x|$ o wektor $[3, 2]$.

x	-2	-1	0	1	2
$y = x $	2	1	0	1	2





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Równanie kwadratowe

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad a \neq 0$$

Najpierw liczymy Δ (delta).

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Pierwiastki równania kwadratowego liczymy w zależności od znaku delty.

$$\Delta > 0 \quad \text{dwa pierwiastki} \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = 0 \quad \text{jeden pierwiastek} \quad x_1 = \frac{-b}{2a}$$

$$\Delta < 0 \quad \text{nie ma pierwiastków}$$

Pierwiastki równania $ax^2 + bx + c = 0$ są **miejscami zerowymi** funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Wzory:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Przykłady:

$$(x + 3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$(3x - 4)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 4 + 4^2 = 9x^2 - 24x + 16$$

$$(3x - 2)(3x + 2) = (3x)^2 - 2^2 = 9x^2 - 4$$

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$$

$$x^2 - 5 = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$$

$$(x + 2)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

$$(2x - 1)^3 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2x \cdot 1^2 - 1^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$$

$$x^3 + 27 = x^3 + 3^3 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$$

$$x^3 - 5 = x^3 - (\sqrt[3]{5})^3 = (x - \sqrt[3]{5})(x^2 + \sqrt[3]{5}x + \sqrt[3]{25})$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Rozwiąż równania:

$$\triangleright x^2 - 4 = 0 \quad \triangleright 2x^2 - 16 = 0 \quad \triangleright x^2 + 9 = 0$$

$$\triangleright x^2 - 3x = 0 \quad \triangleright -2x^2 + 6x = 0$$

Rozwiąż równania:

$$\triangleright x^2 - 4x - 5 = 0 \quad \triangleright x^2 + 6x + 9 = 0 \quad \triangleright x^2 + 2x + 5 = 0$$

$$\triangleright -x^2 + 3x + 4 = 0 \quad \triangleright 2x^2 + 3x - 1 = 0$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Rozwiąż równanie:

$$x^2 - 4 = 0$$

Rozwiązanie:

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \quad \text{lub} \quad x = -2$$

matma235@o2.pl



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Rozwiąż równanie:

$$2x^2 - 16 = 0$$

Rozwiązanie:

$$2x^2 - 16 = 0$$

$$2x^2 = 16 / : 2$$

$$x^2 = 8$$

$$x = \sqrt{8}$$

$$x = \sqrt{4 \cdot 2}$$

$$x = 2\sqrt{2}$$

lub

$$x = -\sqrt{8}$$

$$x = -\sqrt{4 \cdot 2}$$

$$x = -2\sqrt{2}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Rozwiąż równanie:

$$x^2 + 9 = 0$$

Rozwiązanie:

$$x^2 + 9 = 0$$

$$x^2 = -9$$

równanie nie ma rozwiązania

matma235@o2.pl



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Rozwiąż równanie:

$$x^2 - 3x = 0$$

Rozwiązanie:

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x - 3) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{lub} \quad x - 3 = 0$$
$$x = 3$$

matma235@o2.pl



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Rozwiąż równanie:

$$-2x^2 + 6x = 0$$

Rozwiązanie:

$$-2x^2 + 6x = 0$$

$$x(-2x + 6) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{lub} \quad -2x + 6 = 0$$

$$-2x = -6 / : (-2)$$

$$x = 3$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Rozwiąż równanie:

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

Rozwiązanie:

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

Korzystamy ze wzorów na **pierwiastki** równania kwadratowego.

$$a = 1 \quad b = -4 \quad c = -5$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 16 + 20 = 36$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{36} = 6$$

$$x_1 = \frac{-(-4) - 6}{2 \cdot 1} = \frac{4 - 6}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-(-4) + 6}{2 \cdot 1} = \frac{4 + 6}{2} = \frac{10}{2} = 5$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Rozwiąż równanie:

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

Rozwiązanie:

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

Korzystamy ze wzorów na **pierwiastki** równania kwadratowego.

$$a = 1 \quad b = 6 \quad c = 9$$

$$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$$

$$x_1 = \frac{-6}{2 \cdot 1} = \frac{-6}{2} = -3$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Rozwiąż równanie:

$$x^2 + 2x + 5 = 0$$

Rozwiązanie:

$$x^2 + 2x + 5 = 0$$

Korzystamy ze wzorów na **pierwiastki** równania kwadratowego.

$$a = 1 \quad b = 2 \quad c = 5$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16$$

równanie nie ma pierwiastków



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Rozwiąż równanie:

$$-x^2 + 3x + 4 = 0$$

Rozwiązanie:

$$-x^2 + 3x + 4 = 0$$

Korzystamy ze wzorów na **pierwiastki** równania kwadratowego.

$$a = -1 \quad b = 3 \quad c = 4$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 4 = 9 + 16 = 25$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$$

$$x_1 = \frac{-3 - 5}{2 \cdot (-1)} = \frac{-8}{-2} = 4$$

$$x_2 = \frac{-3 + 5}{2 \cdot (-1)} = \frac{2}{-2} = -1$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Rozwiąż równanie:

$$2x^2 + 3x - 1 = 0$$

Rozwiązanie:

$$2x^2 + 3x - 1 = 0$$

Korzystamy ze wzorów na **pierwiastki** równania kwadratowego.

$$a = 2 \quad b = 3 \quad c = -1$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9 + 8 = 17$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{17}$$

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4}$$

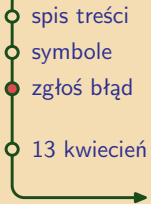
$$x_2 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$$

Funkcja kwadratowa

wzory, twierdzenia, definicje

- Równanie kwadratowe
- Postać ogólna, kanoniczna, iloczynowa
- Wykres funkcji kwadratowej
- Nierówności kwadratowe

przykłady

- 
- spis treści
 - symbole
 - zgłoś błąd
 - 13 kwiecień





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Postać ogólna:

$$y = ax^2 + bx + c$$

przykłady:

$$y = 3x^2 + 5x - 2$$

$$y = 4x^2 + 6x$$

$$y = x^2 + 5$$

Postać kanoniczną otrzymujemy licząc najpierw **delte**, a następnie p i q .

$$y = a(x - p)^2 + q$$

$$p = \frac{-b}{2a} \quad q = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$y = 6(x + 3)^2 - 4$$

$$y = 2(x - 5)^2$$

$$y = x^2 + 3$$

Postać iloczynową otrzymujemy z postaci ogólnej po obliczeniu **pierwiastków**. Jej wygląd zależy od delty.

$$\Delta > 0 \quad y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$y = 2(x - 3)(x + 4)$$

$$y = x(x + 5)$$

$$\Delta = 0 \quad y = a(x - x_1)^2$$

$$y = (x - 3)^2$$

$$y = 4x^2$$

$$\Delta < 0 \quad \text{nie istnieje}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

Sprowadź do postaci kanonicznej:

$$\triangleright y = x^2 + 4x - 3 \quad \triangleright y = -2x^2 + 8x \quad \triangleright y = 3(x - 1)(x + 4)$$

Sprowadź do postaci iloczynowej:

$$\triangleright y = x^2 + 2x - 8 \quad \triangleright y = 3x^2 - 6 \quad \triangleright y = 5x^2 - 2x$$

Sprowadź do postaci ogólnej:

$$\triangleright y = 2(x + 3)^2 - 4 \quad \triangleright y = 2(x - 3)(x + 4)$$





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Sprowadź do postaci kanonicznej:

$$y = x^2 + 4x - 3$$

Rozwiązanie:

liczymy deltę:

$$a = 1 \quad b = 4 \quad c = -3$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16 + 12 = 28$$

Wykorzystujemy wzory na p i q .

$$p = \frac{-4}{2 \cdot 1} = -2 \quad q = \frac{-28}{4 \cdot 1} = -7$$

Postać kanoniczna:

$$y = (x - (-2))^2 + (-7)$$

$$y = (x + 2)^2 - 7$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Sprowadź do postaci kanonicznej:

$$y = -2x^2 + 8x$$

Rozwiązanie:

liczymy deltę:

$$a = -2 \quad b = 8 \quad c = 0$$

$$\Delta = 8^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 0 = 64 - 0 = 64$$

Wykorzystujemy wzory na p i q .

$$p = \frac{-8}{2 \cdot (-2)} = \frac{-8}{-4} = 2 \qquad q = \frac{-64}{4 \cdot (-2)} = \frac{-64}{-8} = 8$$

Postać kanoniczna:

$$y = -2(x - 2)^2 + 8$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Sprawdź do postaci kanonicznej:

$$y = 3(x - 1)(x + 4)$$

Rozwiązanie:

Najpierw sprawdzamy do postaci ogólnej:

$$3(x - 1)(x + 4) = 3(x^2 + 4x - x - 4) = 3(x^2 + 3x - 4) = 3x^2 + 9x - 12$$

liczymy deltę:

$$a = 3 \quad b = 9 \quad c = -12$$

$$\Delta = 9^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-12) = 81 + 144 = 225$$

Wykorzystujemy wzory na p i q .

$$p = \frac{-9}{2 \cdot 3} = -\frac{3}{2} \quad q = \frac{-225}{4 \cdot 3} = \frac{-75}{4} = -18\frac{3}{4}$$

Postać kanoniczna:

$$y = 3\left(x - \left(-\frac{3}{2}\right)\right)^2 + \left(-18\frac{3}{4}\right)$$

$$y = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - 18\frac{3}{4}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Sprowadź do postaci iloczynowej:

$$y = x^2 + 2x - 8$$

Rozwiązanie:

liczymy deltę:

$$a = 1 \quad b = 2 \quad c = -8$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{36} = 6$$

liczymy pierwiastki.

$$x_1 = \frac{-2 - 6}{2 \cdot 1}$$

$$x_2 = \frac{-2 + 6}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = \frac{-8}{2}$$

$$x_2 = \frac{4}{2}$$

$$x_1 = -4$$

$$x_2 = 2$$

Postać iloczynowa:

$$y = (x - (-4))(x - 2)$$

$$y = (x + 4)(x - 2)$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Srowadź do postaci iloczynowej:

$$y = 3x^2 - 6$$

Rozwiązanie:

Prościej jest nie liczyć z delty, tylko przekształcać:

$$y = 3(x^2 - 2)$$

Korzystamy ze wzoru $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$:

$$y = 3(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwietnia



Srowadź do postaci iloczynowej:

$$y = 5x^2 - 2x$$

Rozwiązanie:

Prościej jest nie liczyć z delty, tylko przekształcać:

$$y = 5x \left(x - \frac{2}{5} \right)$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Srowadź do postaci ogólnej:

$$y = 2(x + 3)^2 - 4$$

Rozwiązanie:

Korzystamy ze wzoru $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:

$$y = 2(x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2) - 4$$

$$y = 2(x^2 + 6x + 9) - 4$$

$$y = 2x^2 + 12x + 18 - 4$$

$$y = 2x^2 + 12x + 14$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Sprowadź do postaci ogólnej:

$$y = 2(x - 3)(x + 4)$$

Rozwiązanie:

$$2(x - 3)(x + 4) = 2(x^2 + 4x - 3x - 12) = 2(x^2 + x - 12) = 2x^2 + 2x - 24$$

$$y = 2x^2 + 2x - 24$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



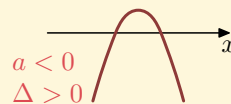
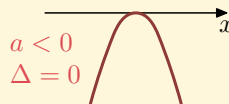
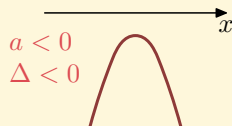
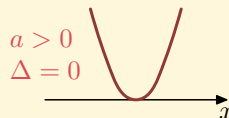
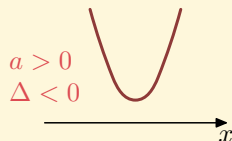
matma235@o2.pl

Wykres funkcji kwadratowej

Wykresem funkcji kwadratowej jest **parabola**.

Położenie wykresu względem osi x zależy od **delty** i **a** .

$$y = ax^2 + bx + c$$



Współrzędne wierzchołka $W(p, q)$ paraboli dane są wzorem:

$$p = \frac{-b}{2a} \quad q = \frac{-\Delta}{4a}$$

Najłatwiej współrzędne wierzchołka odczytać z **postaci kanonicznej**.

Przykład:

$$y = 3(x - 5)^2 + 4$$

$$W(5, 4)$$

$$y = 2(x + 3)^2 - 1$$

$$W(-3, -1)$$

$$y = (x + 4)^2$$

$$W(-4, 0)$$

$$y = x^2 - 6$$

$$W(0, -6)$$



Narysuj wykres funkcji kwadratowej i podaj jej własności:

▷ $y = x^2 - 4x + 3$ ▷ $y = -2x^2 - 8x - 5$ ▷ $y = x^2 - 6x + 10$

Znajdź najmniejszą i największą wartość funkcji na wskazanym przedziale:

▷ $y = x^2 - 4x + 5$ na przedziale $\langle 1, 4 \rangle$

▷ $y = -x^2 + 2x + 2$ na przedziale $\langle -1, 4 \rangle$

▷ $y = x^2 + 4x - 2$ na przedziale $\langle -1, 1 \rangle$

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Narysuj wykres funkcji kwadratowej i podaj jej własności:

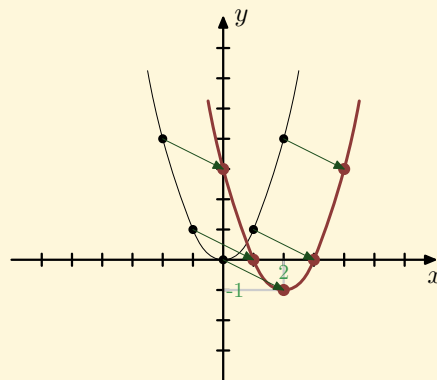
$$y = x^2 - 4x + 3$$

Rozwiązanie:

Sprowadzamy funkcję do postaci kanonicznej: $y = (x - 2)^2 - 1$

Rysujemy wykres $y = x^2$ i przesuwamy go o wektor $[2, -1]$.

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4



dziedzina

zbiór wartości

miejsce zerowe

monotoniczność

wierzchołek

najmniejsza wartość

największa wartość

różnowartościowość

parzystość

$D = \mathbf{R}$

$D^{-1} = \langle -1, \infty \rangle$

$x_0 = 1$ lub $x_0 = 3$

funkcja jest przedziałami monotoniczna

malejąca dla $x \in (-\infty, 2)$

rosnąca dla $x \in \langle 2, \infty \rangle$

$W(2, -1)$

$y_{min} = -1$ dla $x = 2$

nie istnieje

funkcja nie jest różnowartościowa

funkcja nie jest ani parzysta ani nieparzysta



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$y = x^2 - 4x + 3$$

$$a = 1 \quad b = -4 \quad c = 3$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$$

$$p = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2 \quad q = \frac{-4}{4 \cdot 1} = \frac{-4}{4} = -1$$

postać kanoniczna:

$$y = (x - 2)^2 - 1$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Narysuj wykres funkcji kwadratowej i podaj jej własności:

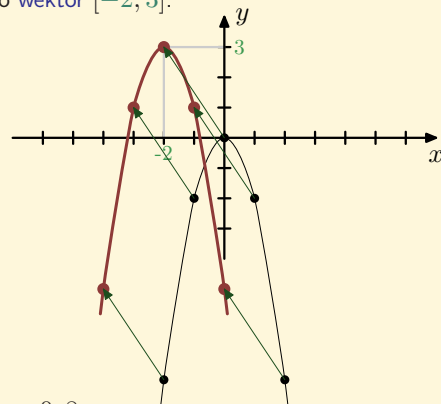
$$y = -2x^2 - 8x - 5$$

Rozwiązanie:

Sprowadzamy funkcję do postaci kanonicznej: $y = -2(x + 2)^2 + 3$

Rysujemy wykres $y = -2x^2$ i **przesuwamy** go o **wektor** $[-2, 3]$.

x	-2	-1	0	1	2
$y = -2x^2$	-8	-2	0	-2	-8



dziedzina

zbiór wartości

miejsce zerowe

monotoniczność

wierzchołek

największa wartość

najmniejsza wartość

różnowartościowość

parzystość

$D = \mathbf{R}$

$D^{-1} = (-\infty, 3]$

$x_0 \approx -3,2$ lub $x_0 \approx -0,8$

funkcja jest przedziałami monotoniczna

rosnąca dla $x \in (-\infty, -2)$

malejąca dla $x \in (-2, \infty)$

$W(-2, 3)$

$y_{max} = 3$ dla $x = -2$

nie istnieje

funkcja nie jest różnowartościowa

funkcja nie jest ani parzysta ani nieparzysta



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$y = -2x^2 - 8x - 5$$

$$a = -2 \quad b = -8 \quad c = -5$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-5) = 64 - 40 = 24$$

$$p = \frac{-(-8)}{2 \cdot (-2)} = \frac{8}{-4} = -2 \quad q = \frac{-24}{4 \cdot (-2)} = \frac{-24}{-8} = 3$$

postać kanoniczna:

$$y = (x - (-2))^2 - 3$$

$$y = -2(x + 2)^2 + 3$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Narysuj wykres funkcji kwadratowej i podaj jej własności:

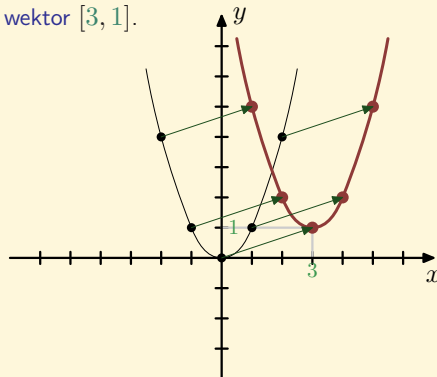
$$y = x^2 - 6x + 10$$

Rozwiązanie:

Sprowadzamy funkcję do postaci kanonicznej: $y = (x - 3)^2 + 1$

Rysujemy wykres $y = x^2$ i przesuwamy go o wektor $[3, 1]$.

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4



dziedzina

zbiór wartości

miejsce zerowe

monotoniczność

wierzchołek

najmniejsza wartość

największa wartość

różnowartościowość

parzystość

$D = \mathbf{R}$

$D^{-1} = \langle 1, \infty \rangle$

nie istnieją

funkcja jest przedziałami monotoniczna

malejąca dla $x \in (-\infty, 3)$

rosnąca dla $x \in \langle 3, -\infty \rangle$

$W(3, 1)$

$y_{min} = 1$ dla $x = 3$

nie istnieje

funkcja nie jest różnowartościowa

funkcja nie jest ani parzysta ani nieparzysta



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$y = x^2 - 6x + 10$$

$$a = 1 \quad b = -6 \quad c = 10$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 36 - 40 = -4$$

$$p = \frac{-(-6)}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3 \quad q = \frac{-(-4)}{4 \cdot 1} = \frac{4}{4} = 1$$

postać kanoniczna:

$$y = (x - 3)^2 + 1$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Znajdź najmniejszą i największą wartość funkcji

$$y = x^2 - 4x + 5$$

na przedziale $\langle 1, 4 \rangle$.

Rozwiązanie:

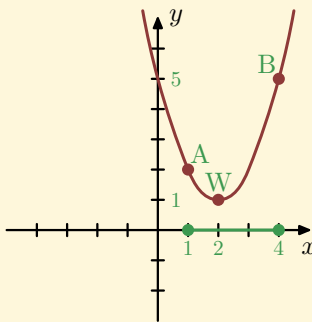
Znajdujemy wartości funkcji na krańcach przedziału:

$$x = 1 \quad y = 1^2 - 4 \cdot 1 + 5 = 1 - 4 + 5 = 2 \quad A(1, 2)$$

$$x = 4 \quad y = 4^2 - 4 \cdot 4 + 5 = 16 - 16 + 5 = 5 \quad B(4, 5)$$

znajdujemy współrzędne wierzchołka: $W(2, 1)$.

Rysujemy przybliżony wykres funkcji na podstawie punktów $A(1, 2)$ $B(4, 5)$ $W(2, 1)$.



Z wykresu odczytujemy, że w przedziale $\langle 1, 4 \rangle$:

- najmniejsza wartość $y_{min} = 1$ dla $x = 2$

- największa wartość $y_{max} = 5$ dla $x = 4$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$y = x^2 - 4x + 5$$

$$a = 1 \quad b = -4 \quad c = 5$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4$$

$$p = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2 \quad q = \frac{-(-4)}{4 \cdot 1} = \frac{4}{4} = 1$$

współrzędne wierzchołka:

$$W(2, 1)$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Znajdź najmniejszą i największą wartość funkcji

$$y = -x^2 + 2x + 2$$

na przedziale $\langle -1, 4 \rangle$.

Rozwiązanie:

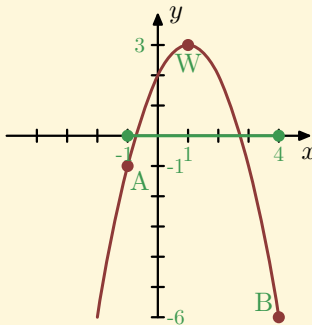
Znajdujemy wartości funkcji na krańcach przedziału:

$$x = -1 \quad y = -(-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 2 = -1 - 2 + 2 = -1 \quad A(-1, -1)$$

$$x = 4 \quad y = -4^2 + 2 \cdot 4 + 2 = -16 + 8 + 2 = -6 \quad B(4, -6)$$

znajdujemy współrzędne wierzchołka: $W(1, 3)$.

Rysujemy przybliżony wykres funkcji na podstawie punktów $A(-1, -1)$ $B(4, -6)$ $W(1, 3)$.



Z wykresu odczytujemy, że w przedziale $\langle -1, 4 \rangle$:

- najmniejsza wartość $y_{min} = -6$ dla $x = 4$

- największa wartość $y_{max} = 3$ dla $x = 1$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$y = -x^2 + 2x + 2$$

$$a = -1 \quad b = 2 \quad c = 2$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2 = 4 + 8 = 12$$

$$p = \frac{-2}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2}{-2} = 1 \quad q = \frac{-12}{4 \cdot (-1)} = \frac{-12}{-4} = 3$$

współrzędne wierzchołka:

$$W(1, 3)$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Znajdź najmniejszą i największą wartość funkcji

$$y = x^2 + 4x - 2$$

na przedziale $\langle -1, 1 \rangle$.

Rozwiązanie:

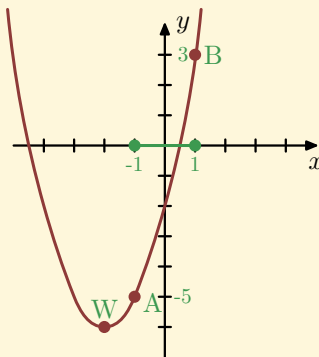
Znajdujemy wartości funkcji na krańcach przedziału:

$$x = -1 \quad y = (-1)^2 + 4 \cdot (-1) - 2 = 1 - 4 - 2 = -5 \quad A(-1, -5)$$

$$x = 1 \quad y = 1^2 + 4 \cdot 1 - 2 = 1 + 4 - 2 = 3 \quad B(1, 3)$$

znajdujemy współrzędne wierzchołka: $W(-2, -6)$.

Rysujemy przybliżony wykres funkcji na podstawie punktów $A(-1, -5)$ $B(1, 3)$ $W(-2, -6)$.



Z wykresu odczytujemy, że w przedziale $\langle -1, 1 \rangle$:

- najmniejsza wartość $y_{min} = -5$ dla $x = -1$
- największa wartość $y_{max} = 3$ dla $x = 1$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$y = x^2 + 4x - 2$$

$$a = 1 \quad b = 4 \quad c = -2$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 16 + 8 = 24$$

$$p = \frac{-4}{2 \cdot 1} = \frac{-4}{2} = -2 \quad q = \frac{-24}{4 \cdot 1} = \frac{-24}{4} = -6$$

współrzędne wierzchołka:

$$W(-2, -6)$$

Nierówności kwadratowe

Przykłady:

$$x^2 + 3x - 5 > 0 \quad -2x^2 + 4x + 2 \leq 0 \quad x^2 - 5x \geq 0 \quad -3x^2 + 4x + 2 < 0$$

Nierówności kwadratowe rozwiązujemy najczęściej tak:

1. liczymy **delte**
2. znajdujemy **miejsca zerowe**, jeśli są
3. rysujemy **parabolę** przechodzącą przez miejsca zerowe
dla $a > 0$ ramiona w górę
dla $a < 0$ ramiona w dół
4. zaznaczamy na zielono dla znaków:
< ≤ część wykresu pod osią x
> ≥ część wykresu nad osią x
5. dla znaków
≤ ≥ zaznaczamy ● w miejscach zerowych
< > zaznaczamy ○ w miejscach zerowych
6. rysujemy **przedział** odpowiadający zielonej części wykresu
7. zapisujemy rozwiązanie

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Rozwiąż nierówności:

$$\triangleright x^2 - 3x - 10 < 0 \quad \triangleright x^2 - 3x - 10 > 0 \quad \triangleright x^2 - 3x - 10 \geq 0$$

$$\triangleright -x^2 + 2x + 3 \geq 0 \quad \triangleright -2x^2 - x + 3 < 0$$

Rozwiąż nierówności:

$$\triangleright x^2 - 3x \geq 0 \quad \triangleright -2x^2 + 5x > 0 \quad \triangleright x^2 - 7 < 0$$

Rozwiąż nierówności:

$$\triangleright 3x^2 + 6x + 10 > 0 \quad \triangleright -2x^2 + 8x + 8 \geq 0 \quad \triangleright x^2 + 2x + 5 < 0$$





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Rozwiąż nierówność:

$$x^2 - 3x - 10 < 0$$

Rozwiązanie:

nierówności kwadratowe

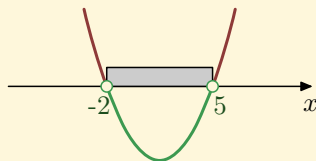
$$a = 1 \quad b = -3 \quad c = -10$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 9 + 40 = 49$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$$

$$x_1 = \frac{-(-3) - 7}{2 \cdot 1} = \frac{3 - 7}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-(-3) + 7}{2 \cdot 1} = \frac{3 + 7}{2} = 5$$



rozwiązaniem jest przedział:

$$x \in (-2, 5)$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Rozwiąż nierówność:

$$x^2 - 3x - 10 > 0$$

Rozwiązanie:

nierówności kwadratowe

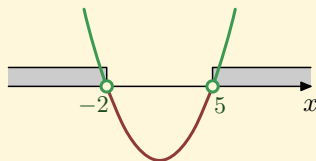
$$a = 1 \quad b = -3 \quad c = -10$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 9 + 40 = 49$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$$

$$x_1 = \frac{-(-3) - 7}{2 \cdot 1} = \frac{3 - 7}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-(-3) + 7}{2 \cdot 1} = \frac{3 + 7}{2} = 5$$



rozwiązaniem jest suma dwóch przedziałów:

$$x \in (-\infty, -2) \cup (5, \infty)$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Rozwiąż nierówność:

$$x^2 - 3x - 10 \geq 0$$

Rozwiązanie:

nierówności kwadratowe

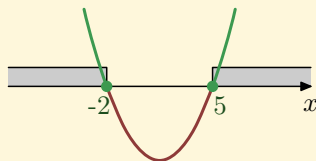
$$a = 1 \quad b = -3 \quad c = -10$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 9 + 40 = 49$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$$

$$x_1 = \frac{-(-3) - 7}{2 \cdot 1} = \frac{3 - 7}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-(-3) + 7}{2 \cdot 1} = \frac{3 + 7}{2} = 5$$



rozwiązaniem jest suma dwóch przedziałów:

$$x \in (-\infty, -2] \cup [5, \infty)$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Rozwiąż nierówność:

$$-x^2 + 2x + 3 \geq 0$$

Rozwiązanie:

nierówności kwadratowe

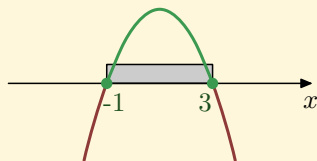
$$a = -1 \quad b = 2 \quad c = 3$$

$$\Delta = (2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 4 + 12 = 16$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$$

$$x_1 = \frac{-2 - 4}{2 \cdot (-1)} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$x_2 = \frac{-2 + 4}{2 \cdot (-1)} = \frac{2}{-2} = -1$$



rozwiązaniem jest przedział:

$$x \in \langle -1, 3 \rangle$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Rozwiąż nierówność:

$$-2x^2 - x + 3 < 0$$

Rozwiązanie:

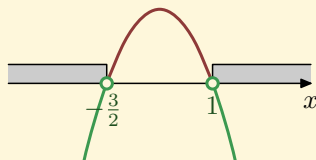
nierówności kwadratowe

$$a = -2 \quad b = -1 \quad c = 3$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 3 = 1 + 24 = 25$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$$

$$x_1 = \frac{-(-1) - 5}{2 \cdot (-2)} = \frac{1 - 5}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1 \quad x_2 = \frac{-(-1) + 5}{2 \cdot (-2)} = \frac{6}{-4} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$$



rozwiązaniem jest suma dwóch przedziałów:

$$x \in (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (1, \infty)$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Rozwiąż nierówność:

$$x^2 - 3x \geq 0$$

Rozwiązanie:

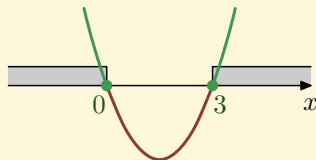
nierówności kwadratowe

zamiast liczyć deltę prościej jest policzyć **pierwiastki** w ten sposób:

$$x^2 - 3x \geq 0$$

$$x(x - 3) \geq 0$$

$$x_1 = 0 \quad \text{lub} \quad x - 3 = 0$$
$$x_2 = 3$$



rozwiązaniem jest **suma** dwóch **przedziałów**:

$$x \in (-\infty, 0] \cup [3, \infty)$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Rozwiąż nierówność:

$$-2x^2 + 5x > 0$$

Rozwiązanie:

nierówności kwadratowe

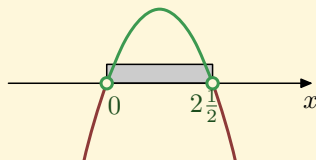
zamiast liczyć deltę prościej jest policzyć **pierwiastki** w ten sposób:

$$-2x^2 + 5x > 0$$

$$-2 \left(x^2 - \frac{5}{2}x \right) > 0$$

$$-2x \left(x - \frac{5}{2} \right) > 0$$

$$x_1 = 0 \quad \text{lub} \quad x - \frac{5}{2} = 0$$
$$x_2 = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$$



rozwiązaniem jest **przedział**:

$$x \in \left(0, 2\frac{1}{2} \right)$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Rozwiąż nierówność:

$$x^2 - 7 < 0$$

Rozwiązanie:

nierówności kwadratowe

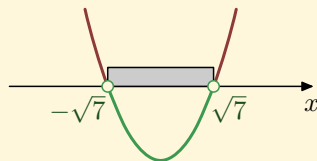
zamiast liczyć deltę prościej jest policzyć pierwiastki korzystając ze wzoru

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b):$$

$$x^2 - 7 < 0$$

$$(x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7}) < 0$$

$$\begin{array}{lcl} x - \sqrt{7} = 0 & \text{lub} & x + \sqrt{7} = 0 \\ x_1 = \sqrt{7} & & x_2 = -\sqrt{7} \end{array}$$



rozwiązaniem jest przedział:

$$x \in (-\sqrt{7}, \sqrt{7})$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Rozwiąż nierówność:

$$3x^2 + 6x + 10 > 0$$

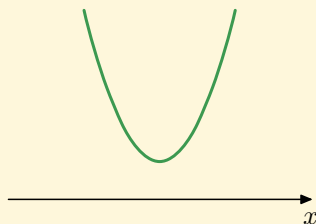
Rozwiązanie:

nierówności kwadratowe

$$a = 3 \quad b = 6 \quad c = 10$$

$$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 3 \cdot 10 = 36 - 120 = -84$$

$\Delta < 0$, a więc nie ma miejsc zerowych.



wszystkie liczby spełniają tę nierówność



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Rozwiąż nierówność:

$$-2x^2 + 8x - 8 \geq 0$$

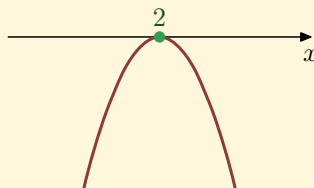
Rozwiązanie:

nierówności kwadratowe

$$a = -2 \quad b = 8 \quad c = -8$$

$$\Delta = 8^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-8) = 64 - 64 = 0$$

$$x_1 = \frac{-8}{2 \cdot (-2)} = \frac{-8}{-4} = 2$$



rozwiązanie:

$$x = 2$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Rozwiąż nierówność:

$$x^2 + 2x + 5 < 0$$

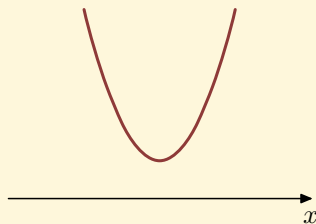
Rozwiązanie:

nierówności kwadratowe

$$a = 1 \quad b = 2 \quad c = 5$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16$$

$\Delta < 0$, a więc nie ma miejsc zerowych.



nie ma liczb spełniających tą nierówność



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Wielomiany

Przykłady:

$$y = x^5 - 2x^3 + 5x + 4$$

$$y = 2x^3 + 4x^2 - 2$$

$$y = x^2 - 3x + 5$$

$$y = 5x - 2$$

$$y = 8$$

wielomian stopnia 5

wielomian stopnia 3

wielomian stopnia 2

wielomian stopnia 1

wielomian stopnia 0

Dzielenie wielomianów

Z dzieleniem wielomianów jest tak samo, jak z dzieleniem liczb:

$$6 : 3 = 2 \text{ ponieważ } 2 \cdot 3 = 6$$

$$(x^3 - 8x^2 + 15x - 8) : (x - 1) = x^2 - 7x + 8 \text{ ponieważ}$$

$$(x^2 - 7x + 8)(x - 1) = x^3 - x^2 - 7x^2 + 7x + 8x - 8 = x^3 - 8x^2 + 15x - 8$$

Dzielenie krok po kroku:

Krok I

$$(x^3 - 8x^2 + 15x - 8) : (x - 1)$$

zaczynamy

dalej

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Krok II

$$(x^3 - 8x^2 + 15x - 8) : (x - 1) = x^2$$

dzielimy x^3 na x

Krok III

$$(x^3 - 8x^2 + 15x - 8) : (x - 1) = x^2$$
$$-x^3 + x^2$$

mnożymy x^2 razy $x - 1$
wyniki zapisujemy z przeciwnymi
znakami

Krok IV

$$(x^3 - 8x^2 + 15x - 8) : (x - 1) = x^2$$
$$\begin{array}{r} -x^3 + x^2 \\ \hline = -7x^2 + 15x \end{array}$$

dodajemy i spisujemy $15x$

dalej



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Krok V

$$\begin{array}{l} (x^3 - 8x^2 + 15x - 8) : (x - 1) = x^2 - 7x \\ \underline{-x^3 + x^2} \\ = -7x^2 + 15x \end{array}$$

dzielimy $-7x^2$ na x

Krok VI

$$\begin{array}{l} (x^3 - 8x^2 + 15x - 8) : (x - 1) = x^2 - 7x \\ \underline{-x^3 + x^2} \\ = -7x^2 + 15x \\ \quad \underline{7x^2 - 7x} \end{array}$$

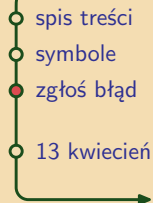
mnożymy $-7x$ razy $x - 1$
wyniki zapisujemy z przeciwnymi
znakami

Krok VII

$$\begin{array}{l} (x^3 - 8x^2 + 15x - 8) : (x - 1) = x^2 - 7x \\ \underline{-x^3 + x^2} \\ = -7x^2 + 15x \\ \quad \underline{7x^2 - 7x} \\ = 8x - 8 \end{array}$$

dodajemy i spisujemy -8

dalej


$$\begin{array}{r} (x^3-8x^2+15x-8):(x-1)=x^2-7x+8 \\ \underline{-x^3+x^2} \\ -7x^2+15x \\ \underline{7x^2-7x} \\ 8x-8 \end{array}$$

Krok IX

$$\begin{array}{r} (x^3-8x^2+15x-8):(x-1) = x^2-7x+8 \\ \underline{-x^3+x^2} \\ 7x^2-7x \\ \underline{-7x^2+7x} \\ 8x-8 \\ \underline{-8x+8} \\ 0 \end{array}$$

mnożymy 8 razy $x - 1$
wyniki zapisujemy z przeciwnymi
znakami

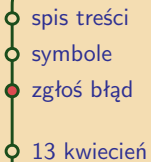
$$\begin{array}{r} (x^3-8x^2+15x-8):(x-1)=x^2-7x+8 \\ \underline{-x^3+x^2} \\ 7x^2-7x \\ \underline{-7x^2+7x} \\ 8x-8 \\ \underline{-8x+8} \\ 0 \end{array}$$

dodajemy
nie otrzymaliśmy reszty

wzory, twierdzenia, definicje

- wielomiany
- pierwiastek wielomianu
- dzielenie wielomianów
- rozkład wielomianu na czynniki
- twierdzenie Bézout
- twierdzenie o pierwiastkach wymiernych
- krotność pierwiastka wielomianu
- nierówność wielomianowa

przykłady

- 
- spis treści
 - symbole
 - zgłoś błąd
 - 13 kwiecień





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Wykonaj dzielenie:

$$\triangleright (x^3 + x^2 - 22x - 40) : (x - 5)$$

$$\triangleright (6x^3 - 19x^2 + 13x - 2) : (3x - 2)$$

$$\triangleright (2x^3 - 5x^2 + 8x - 3) : (2x - 1)$$

$$\triangleright (x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 15x + 9) : (x - 3)$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Wykonaj dzielenie:

$$(x^3 + x^2 - 22x - 40) : (x - 5)$$

Rozwiązanie:

dzielenie wielomianów

$$\begin{aligned}(x^3 + x^2 - 22x - 40) : (x - 5) &= x^2 + 6x + 8 \\ \underline{-x^3 + 5x^2} & \\ &= 6x^2 - 22x \\ &\quad \underline{-6x^2 + 30x} \\ &= 8x - 40 \\ &\quad \underline{-8x + 40} \\ &= =\end{aligned}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Wykonaj dzielenie:

$$(2x^3 - 5x^2 + 8x - 3) : (2x - 1)$$

Rozwiązanie:

dzielenie wielomianów

$$\begin{aligned}(2x^3 - 5x^2 + 8x - 3) : (2x - 1) &= x^2 - 2x + 3 \\ \underline{-2x^3 + x^2} & \\ &= -4x^2 + 8x \\ &\quad \underline{4x^2 - 2x} \\ &= 6x - 3 \\ &\quad \underline{-6x + 3} \\ &= =\end{aligned}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Wykonaj dzielenie:

$$(6x^3 - 19x^2 + 13x - 2) : (3x - 2)$$

Rozwiązanie:

dzielenie wielomianów

$$\begin{array}{r} (6x^3 - 19x^2 + 13x - 2) : (3x - 2) = 2x^2 - 5x + 1 \\ \underline{-6x^3 + 4x^2} \\ -15x^2 + 13x \\ \underline{15x^2 - 10x} \\ -3x - 2 \\ \underline{-3x + 2} \\ = = \end{array}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Wykonaj dzielenie:

$$(x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 15x + 9) : (x - 3)$$

Rozwiązanie:

dzielenie wielomianów

$$\begin{aligned}(x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 15x + 9) : (x - 3) &= x^3 - 2x^2 + 4x - 3 \\&\underline{-x^4 + 3x^3} \\&= -2x^3 + 10x^2 \\&\quad \underline{-2x^3 - 6x^2} \\&= 4x^2 - 15x \\&\quad \underline{-4x^2 + 12x} \\&= -3x + 9 \\&\quad \underline{3x - 9} \\&= =\end{aligned}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Rozkład wielomianu na czynniki

Rozwiązując równanie wielomianowe lub nierówność wielomianową rozkładamy **wielomian** na iloczyn czynników, do których zaliczamy:

- wyrażenia liniowe np. $(x + 3)$, $(x - 5)$, $(2x - 1)$
- wyrażenia kwadratowe z $\Delta < 0$ np. $(x^2 + 9)$, $(x^2 + 7)$, $(x^2 + 2x + 8)$
- potęgi x np. x , x^2 , x^3

Z wielomianu rozłożonego na czynniki łatwo jest odczytać **pierwiastki**.

Przykłady:

$$x^3 - x^2 - 17x - 15 = (x - 5)(x + 3)(x + 1)$$

pierwiastki:

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = -3$$

$$x_3 = -1$$

$$x^4 + 6x^3 + 16x^2 + 32x = x(x + 4)(x^2 + 2x + 8)$$

pierwiastki:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -4$$

nie ma ($\Delta < 0$)

$$x^5 - 4x^4 + 9x^3 - 36x^2 = x^2(x^2 + 9)(x - 4)$$

pierwiastki:

$$x_1 = 0$$

nie ma

$$x_2 = 4$$

Pierwiastek wielomianu

Pierwiastek wielomianu to **miejsce zerowe** wielomianu, czyli liczba dla której wartość wielomianu jest równa zero.

Przykłady:

$$w(x) = x^4 - x^2$$

$$x_0 = 1 \quad \text{ponieważ } w(1) = 1^4 - 1^2 = 1 - 1 = 0$$

$$w(x) = x^3 - 8$$

$$x_0 = 2 \quad \text{ponieważ } w(2) = 2^3 - 8 = 8 - 8 = 0$$

$$w(x) = x^5 - x^4 + x^2 + x$$

$$x_0 = 0 \quad \text{ponieważ } w(0) = 0^5 - 0^4 + 0^2 + 0 = 0$$

Najłatwiej jest odczytać pierwiastki z wielomianu rozłożonego na **czynniki**.

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

Twierdzenie Bézout

Jeżeli x_0 jest **pierwiastkiem** wielomianu $w(x)$, to wielomian $w(x)$ **dzieli** się przez $x - x_0$.
Jeżeli wielomian $w(x)$ **dzieli** się przez $x - x_0$, to x_0 jest **pierwiastkiem** wielomianu $w(x)$.

Przykład:

$$w(x) = x^3 + x^2 - 2 \quad w(1) = 1^3 + 1^2 - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$$

Liczba 1 jest **pierwiastkiem** wielomianu $x^3 + x^2 - 2$, a więc ten wielomian możemy **podzielić** na $x - 1$ i nie otrzymamy reszty.



Twierdzenie o pierwiastkach wymiernych

Jeżeli wielomian

$$w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

ma współczynniki a, b, c, d całkowite, to jego pierwiastków całkowitych należy szukać pośród dzielników ostatniego współczynnika d . Twierdzenie to jest prawdziwe dla wielomianów dowolnego stopnia.

Przykład:

$$w(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 6$$

dzielniki -6 to: $-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6$

Jeżeli wielomian $w(x)$ ma pierwiastek całkowity, to jest nim jeden z tych dzielników.

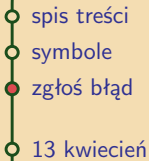
Jeżeli wielomian

$$w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

ma współczynniki a, b, c, d całkowite, to jego pierwiastków wymiernych należy szukać pośród liczb postaci $\frac{p}{q}$

p – dzielnik ostatniego współczynnika d

q – dzielnik pierwszego współczynnika a

- 
- spis treści
 - symbole
 - zgłoś błąd
 - 13 kwiecień





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl



Równanie kwadratowe to równanie wielomianowe stopnia drugiego.

Rozwiąż przekształcając równanie:

$$\triangleright x^3 - 5x^2 = 0$$

$$\triangleright x^3 - 9x = 0$$

$$\triangleright x^3 + 4x = 0$$

$$\triangleright x^3 + 3x^2 + 2x = 0$$

$$\triangleright 2x^3 + 2x^2 - 12x = 0$$

Rozwiąż przekształcając równanie:

$$\triangleright x^3 + 1 = 0$$

$$\triangleright x^3 - 8 = 0$$

$$\triangleright 2x^4 + 4x = 0$$

Rozwiąż przekształcając równanie:

$$\triangleright x^3 + 2x^2 + 3x + 6 = 0$$

$$\triangleright 2x^3 - 6x^2 - 3x + 9 = 0$$

Rozwiąż korzystając z dzielników:

$$\triangleright x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\triangleright x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = 0$$

$$\triangleright x^3 - x^2 - 3x - 9 = 0$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Rozwiąż przekształcając równanie:

$$x^3 - 5x^2 = 0$$

Rozwiązanie:

Rozkładamy wielomian na **czynniki**:

$$x^3 - 5x^2 = 0$$

$$x^2(x - 5) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 5$$

pierwiastki:



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Rozwiąż przekształcając równanie:

$$x^3 - 9x = 0$$

Rozwiązanie:

Rozkładamy wielomian na **czynniki**:

$$x^3 - 9x = 0$$

$$x(x^2 - 9) = 0$$

$$x(x^2 - 3^2) = 0$$

Korzystamy z $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

$$x(x - 3)(x + 3) = 0$$

pierwiastki:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 3$$

$$x_3 = -3$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Rozwiąż przekształcając równanie:

$$x^3 + 4x = 0$$

Rozwiązanie:

Rozkładamy wielomian na czynniki:

$$x^3 + 4x = 0$$

$$x(x^2 + 4) = 0$$

$$x_1 = 0$$

nie ma

pierwiastki:



Rozwiąż przekształcając równanie:

$$x^3 + 3x^2 + 2x = 0$$

Rozwiązanie:

Rozkładamy wielomian na **czynniki**:

$$x^3 + 3x^2 + 2x = 0$$

$$x(x^2 + 3x + 2) = 0$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{1} = 1$$

$$x_1 = \frac{-3-1}{2 \cdot 1} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-3+1}{2 \cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

postać iloczynowa: $(x - (-2))(x - (-1)) = (x + 2)(x + 1)$

$$x(x + 2)(x + 1) = 0$$

pierwiastki:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -2$$

$$x_3 = -1$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Rozwiąż przekształcając równanie:

$$2x^3 + 2x^2 - 12x = 0$$

Rozwiązanie:

Rozkładamy wielomian na **czynniki**:

$$2x^3 + 2x^2 - 12x = 0$$

$$2(x^3 + x^2 - 6x) = 0$$

$$2x(x^2 + x - 6) = 0$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$$

$$x_1 = \frac{-1-5}{2 \cdot 1} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$x_2 = \frac{-1+5}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$$

postać iloczynowa: $(x - (-3))(x - 2) = (x + 3)(x - 2)$

$$x(x + 3)(x - 2) = 0$$

pierwiastki:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -3$$

$$x_3 = 2$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Rozwiąż przekształcając równanie:

$$x^3 + 1 = 0$$

Rozwiązanie:

Rozkładamy wielomian na **czynniki**:

$$x^3 + 1 = 0$$

$$x^3 + 1^3 = 0$$

Korzystamy z $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$$(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$$

$$x^2 - x + 1 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3$$

$\Delta < 0$, nie ma **pierwiastków**

$$(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$$

pierwiastki:

$$x_1 = -1$$

nie ma



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Rozwiąż przekształcając równanie:

$$x^3 - 8 = 0$$

Rozwiązanie:

Rozkładamy wielomian na **czynniki**:

$$x^3 - 8 = 0$$

$$x^3 - 2^3 = 0$$

Korzystamy z $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$$(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$$

$$x^2 + 2x + 4 = 0$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 4 - 16 = -12$$

$\Delta < 0$, nie ma **pierwiastków**

$$(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$$

pierwiastki:

$$x_1 = 2$$

nie ma



matma235@o2.pl

Rozwiąż przekształcając równanie:

$$2x^4 + 4x = 0$$

Rozwiązanie:

Rozkładamy wielomian na **czynniki**:

$$2x^4 + 4x = 0$$

$$2(x^4 + 2x) = 0$$

$$2x(x^3 + 2) = 0$$

$$2x(x^3 + (\sqrt[3]{2})^3) = 0$$

Korzystamy z $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$$2x(x + \sqrt[3]{2})(x^2 - \sqrt[3]{2}x + (\sqrt[3]{2})^2) = 0$$

$$2x(x + \sqrt[3]{2})(x^2 - \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4}) = 0$$

$$x^2 - \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4} = 0$$

$$\Delta = (\sqrt[3]{2})^2 - 4 \cdot 1 \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{4} - 4\sqrt[3]{4} = -3\sqrt[3]{4}$$

$\Delta < 0$, nie ma **pierwiastków**

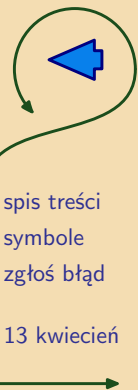
$$2x(x + \sqrt[3]{2})(x^2 - \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4}) = 0$$

pierwiastki:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -\sqrt[3]{2}$$

nie ma



Rozwiąż przekształcając równanie:

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 6 = 0$$

Rozwiązanie:

Rozkładamy wielomian na **czynniki**:

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 6 = 0$$

$$x^2(x + 2) + 3(x + 2) = 0$$

$$(x^2 + 3)(x + 2) = 0$$

pierwiastki:

nie ma $x_1 = -2$





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Rozwiąż przekształcając równanie:

$$2x^3 - 6x^2 - 4x + 12 = 0$$

Rozwiązanie:

Rozkładamy wielomian na **czynniki**:

$$2x^3 - 6x^2 - 4x + 12 = 0$$

$$2x^2(x - 3) - 4(x - 3) = 0$$

$$(2x^2 - 4)(x - 3) = 0$$

$$2(x^2 - 2)(x - 3) = 0$$

$$2(x^2 - (\sqrt{2})^2)(x - 3) = 0$$

Korzystamy z $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$$2(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - 3) = 0$$

pierwiastki:

$$x_1 = \sqrt{2}$$

$$x_2 = -\sqrt{2}$$

$$x_3 = 3$$



Rozwiąż korzystając z dzielników:

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

Rozwiązanie:

Rozkładamy wielomian na **czynniki**, korzystając z **twierdzenia** o pierwiastkach wymiernych.

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

Dzielniki **6** to: $-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6$

$$w(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 - 5(-1) + 6 = -1 - 2 + 5 + 6 = 8$$

$$w(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$$

Liczba **1** jest **pierwiastkiem** wielomianu, a więc zgodnie z **twierdzeniem** Bézout wielomian $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ **dzieli** się na $x - 1$ bez reszty.

$$(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1) = x^2 - x - 6$$

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x^2 - x - 6)$$

$$(x - 1)(x^2 - x - 6) = 0$$

$$x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$$

$$(x - 1)(x + 2)(x - 3) = 0$$

pierwiastki:

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -2$$

$$x_3 = 3$$





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$\begin{aligned}(x^3 - 2x^2 - 5x - 6) : (x - 1) &= x^2 - x - 6 \\ \underline{-x^3 + x^2} & \\ &= -x^2 - 5x \\ &\quad \underline{x^2 - x} \\ &= -6x + 6 \\ &\quad \underline{6x - 6} \\ &= =\end{aligned}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$$

$$x_1 = \frac{-(-1) - 5}{2 \cdot 1} = \frac{1 - 5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-(-1) + 5}{2 \cdot 1} = \frac{1 + 5}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

postać iloczynowa: $(x - (-2))(x - 3) = (x + 2)(x - 3)$

$$x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$$

Rozwiąż korzystając z dzielników:

$$x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = 0$$

Rozwiązanie:

Rozkładamy wielomian na **czynniki**, korzystając z **twierdzenia** o pierwiastkach wymiernych.

$$x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = 0$$

Dzielniki 18 to: $-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6, -9, 9, -18, 18$

$$w(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 - 3(-1) + 18 = -1 - 4 + 3 + 18 = 16$$

$$w(1) = 1^3 - 4 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 18 = 1 - 4 - 3 + 18 = 12$$

$$w(-2) = (-2)^3 - 4(-2)^2 - 3(-2) + 18 = -8 - 16 + 6 + 18 = 0$$

Liczba -2 jest **pierwiastkiem** wielomianu, a więc zgodnie z **twierdzeniem** Bézout wielomian $x^3 - 4x^2 - 3x + 18$ **dzieli** się na $x - (-2) = x + 2$ bez reszty.

$$(x^3 - 4x^2 - 3x + 18) : (x + 2) = x^2 - 6x + 9$$

$$x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = (x + 2)(x^2 - 6x + 9)$$

$$(x - 1)(x^2 - 6x + 9) = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

$$(x + 2)(x - 3)^2 = 0$$

pierwiastki:

$$x_1 = -2 \quad x_2 = 3$$



$$\begin{aligned}
 (x^3 - 4x^2 - 3x + 18) : (x + 2) &= x^2 - 6x + 9 \\
 \underline{-x^3 - 2x^2} & \\
 &= -6x^2 - 3x \\
 &\quad \underline{6x^2 + 12x} \\
 &= 9x + 18 \\
 &\quad \underline{-9x - 18} \\
 &= =
 \end{aligned}$$

- ◉ spis treści
- ◉ symbole
- ◉ zgłoś błąd
- ◉ 13 kwiecień





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$$

$$x_1 = \frac{-(-6)}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$$

postać iloczynowa: $(x - 3)^2$

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Rozwiąż korzystając z dzielników:

$$x^3 - x^2 - 3x - 9 = 0$$

Rozwiązanie:

Rozkładamy wielomian na **czynniki**, korzystając z **twierdzenia** o pierwiastkach wymiernych.

$$x^3 - x^2 - 3x - 9 = 0$$

Dzielniki **-9** to: $-1, 1, -3, 3, -9, 9$

$$w(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - 3(-1) - 9 = -1 - 1 + 3 - 9 = -8$$

$$w(1) = 1^3 - 1^2 - 3 \cdot 1 - 9 = 1 - 1 - 3 - 9 = -12$$

$$w(-3) = (-3)^3 - (-3)^2 - 3(-3) - 9 = -27 - 9 + 9 - 9 = -35$$

$$w(3) = 3^3 - 3^2 - 3 \cdot 3 - 9 = 27 - 9 - 9 - 9 = 0$$

Liczba **3** jest **pierwiastkiem** wielomianu, a więc zgodnie z **twierdzeniem** Bézout wielomian $x^3 - x^2 - 3x - 9$ **dzieli** się na $x - 3$ bez reszty.

$$(x^3 - x^2 - 3x - 9) : (x - 3) = x^2 + 2x + 3$$

$$x^3 - x^2 - 3x - 9 = (x - 3)(x^2 + 2x + 3)$$

$$(x - 3)(x^2 + 2x + 3) = 0$$

$$x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 - 12 = -8 < 0, \text{ nie ma pierwiastków}$$

$$(x - 3)(x^2 + 2x + 3) = 0$$

$$x_1 = 3$$

nie ma

pierwiastki:

$$\begin{aligned}
 (x^3 - x^2 - 3x - 9) : (x - 3) &= x^2 + 2x + 3 \\
 \underline{-x^3 + 3x^2} & \\
 &= 2x^2 - 3x \\
 \underline{-2x^2 + 6x} & \\
 &= 3x - 9 \\
 \underline{-3x + 9} & \\
 &= =
 \end{aligned}$$

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień



Liczby **naturalne**: $\mathbf{N}$

0, 1, 2, 3, 4, ...

Liczby **całkowite**: $\mathbf{C}$

0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, ...

Liczby **wymierne**: $\mathbf{W}$

Liczby, które możemy przedstawić w postaci $\frac{p}{q}$, gdzie p i q są liczbami całkowitymi.

Przykłady: 0, 5, -4, $\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3}$, $4\frac{1}{5}$

Liczby **niewymierne**: $\mathbf{R} \setminus \mathbf{W}$

Przykłady: $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, π , $1 - \sqrt{7}$

Liczby **rzeczywiste**: $\mathbf{R}$

Wszystkie liczby jakimi się posługujemy w szkole średniej.

- 
- spis treści
 - symbole
 - zgłoś błąd
 - 13 kwiecień



Nierówność wielomianowa

Przykłady:

$$x^4 - 2x^3 + 5x > 0 \quad -2x^3 + 3x^2 - 4 \leq 0 \quad x(x-3)^2(x+4)^3 > 0$$

Nierówności wielomianowe rozwiązujemy najczęściej tak:

1. rozkładamy wielomian na **czynniki**
2. odczytujemy **pierwiastki**
3. odczytujemy **krotność** pierwiastków
4. zaznaczymy pierwiastki na osi liczbowej
5. rysujemy przybliżony wykres wielomianu zaczynając zawsze od **prawej** strony
od **góry**, jeżeli wielomian zaczyna się od liczby dodatniej
od **dołu**, jeżeli wielomian zaczyna się od liczby ujemnej
6. rysowany wykres
„przecina” oś dla pierwiastków o krotności nieparzystej
„odbija” się od osi dla pierwiastków o krotności parzystej
7. zaznaczamy na zielono dla znaków:
 $< \leq$ część wykresu **pod** osią x
 $> \geq$ część wykresu **nad** osią x
8. dla znaków
 $\leq \geq$ zaznaczamy ● w miejscach zerowych
 $< >$ zaznaczamy ○ w miejscach zerowych
9. rysujemy **przedział** odpowiadający zielonej części wykresu
10. zapisujemy rozwiązanie

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Krotność pierwiastka wielomianu

Krotność pierwiastka to wartość potęgi przy x lub nawiasie, jeżeli wielomian jest rozłożony na **czynniki**.

Przykłady:

pierwiastki:

krotność:

$$x^2(x+1)^3(x-2)^4$$

$x_1 = 0$	$x_2 = -1$	$x_3 = 2$
2	3	4

pierwiastki:

krotność:

$$x(x-2)^5(x+3)$$

$x_1 = 0$	$x_2 = 2$	$x_3 = -3$
1	5	1



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Rozwiąż nierówności:

$$\triangleright x(x-3)(x+2) > 0$$

$$\triangleright -x^2(x-1) < 0$$

Rozwiąż nierówności:

$$\triangleright x^3 + 2x^2 - 3x > 0$$

$$\triangleright -2x^3 + 18x^2 - 48x + 32 > 0$$

$$\triangleright x(x+1)^2(x-2)^3 \geq 0$$

$$\triangleright -2x(x+1)(x+5)^4(x-3) \leq 0$$

$$\triangleright x^3 + 3x^2 + 3x + 9 \leq 0$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Rozwiąż nierówność:

$$x(x-3)(x+2) > 0$$

Rozwiązanie:

Nierówności wielomianowe

pierwiastki:

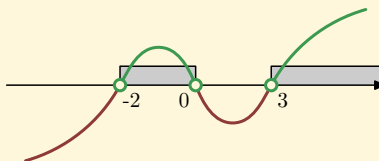
krotność:

$$x(x-3)(x+2) > 0$$

$$x_1 = 0 \\ 1$$

$$x_2 = 3 \\ 1$$

$$x_3 = -2 \\ 1$$



$$x \in (-2, 0) \cup (3, \infty)$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Rozwiąż nierówność:

$$x(x+1)^2(x-2)^3 \geq 0$$

Rozwiązanie:

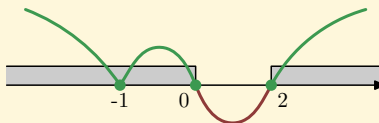
Nierówności wielomianowe

pierwiastki:

krotność:

$$x(x+1)^2(x-2)^3 \geq 0$$

$x_1 = 0$ $x_2 = -1$ $x_3 = 2$
1 2 3



$$x \in (-\infty, 0) \cup \langle 2, \infty)$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Rozwiąż nierówność:

$$-x^2(x-1) < 0$$

Rozwiązanie:

Nierówności wielomianowe

pierwiastki:

krotność:

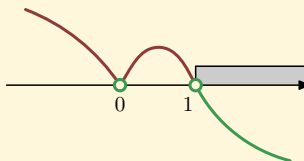
$$-x^2(x-1) < 0$$

$$x_1 = 0$$

$$2$$

$$x_2 = 1$$

$$1$$



$$x \in (1, \infty)$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Rozwiąż nierówność:

$$-2x(x+1)(x+5)^4(x-3) \leq 0$$

Rozwiązanie:

Nierówności wielomianowe

$$-2x(x+1)(x+5)^4(x-3) \leq 0$$

pierwiastki:

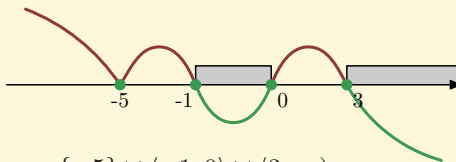
krotność:

$$x_1 = 0 \\ 1$$

$$x_2 = -1 \\ 1$$

$$x_3 = -5 \\ 4$$

$$x = 3 \\ 1$$



$$x \in \{-5\} \cup \langle -1, 0 \rangle \cup \langle 3, \infty \rangle$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Rozwiąż nierówność:

$$x^3 + 2x^2 - 3x > 0$$

Rozwiązanie:

Nierówności wielomianowe

$$x^3 + 2x^2 - 3x > 0$$

$$x(x^2 + 2x - 3) > 0$$

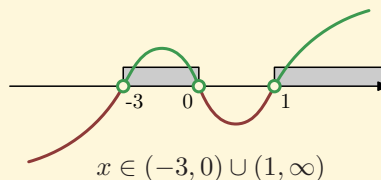
$$x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$$

$$x(x + 3)(x - 1) > 0$$

$$\begin{array}{ccc} x_1 = 0 & x_2 = -3 & x_3 = 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

pierwiastki:

krotność:





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$x^2 + 2x - 3$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$$

$$x_1 = \frac{-2 - 4}{2 \cdot 1} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$x_2 = \frac{-2 + 4}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$$

postać iloczynowa: $(x - (-3))(x - 1) = (x + 3)(x - 1)$

$$x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Rozwiąż nierówność:

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 9 \leq 0$$

Rozwiązanie:

Nierówności wielomianowe

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 9 \leq 0$$

$$x^2(x + 3) + 3(x + 3) \leq 0$$

$$(x^2 + 3)(x + 3) \leq 0$$

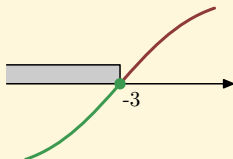
nie ma

$$x_1 = -3$$

1

pierwiastki:

krotność:



$$x \in (-\infty, -3)$$



matma235@o2.pl

Rozwiąż nierówność:

$$-2x^3 + 18x^2 - 48x + 32 > 0$$

Rozwiązanie:

Nierówności wielomianowe

$$-2x^3 + 18x^2 - 48x + 32 > 0$$

$$-2(x^3 - 9x^2 + 24x - 16) > 0$$

$$x^3 - 9x^2 + 24x - 16 = (x - 1)(x^2 - 8x + 16)$$

$$-2(x - 1)(x^2 - 8x + 16) > 0$$

$$x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$$

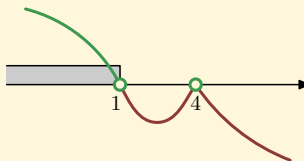
$$-2(x - 1)(x - 4)^2 > 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 4$$

pierwiastki:

krotność:



$$x \in (-\infty, 1)$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$x^3 - 9x^2 + 24x - 16$$

Dzielniki **-16** to: $-1, 1, -2, 2, -4, 4, -8, 8, -16, 16$

$$w(-1) = (-1)^3 - 9(-1)^2 + 24(-1) - 16 = -1 - 9 - 24 - 16 = -50$$

$$w(1) = 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 24 \cdot 1 - 16 = 1 - 9 + 24 - 16 = 0$$

Liczba **1** jest **pierwiastkiem** wielomianu, a więc zgodnie z **twierdzeniem** Bézout wielomian $x^3 - 9x^2 + 24x - 16$ **dzieli** się na $x - 1$ bez reszty.

$$\begin{array}{r} (x^3 - 9x^2 + 24x - 16) : (x - 1) = x^2 - 8x + 16 \\ \underline{-x^3 + x^2} \\ -8x^2 + 24x \\ \underline{8x^2 - 8x} \\ 16x - 16 \\ \underline{-16x + 16} \\ = = \end{array}$$

$$x^3 - 9x^2 + 24x - 16 = (x - 1)(x^2 - 8x + 16)$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$x^2 - 8x + 16$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 16 - 16 = 0$$

$$x_1 = \frac{-(-8)}{2 \cdot 1} = \frac{8}{2} = 4$$

postać iloczynowa: $(x - 4)^2$

$$x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$$

Funkcje wymierne

Funkcja wymierna to funkcja postaci:

$$y = \frac{w(x)}{p(x)}$$

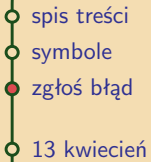
$w(x)$, $p(x)$ – wielomiany

Przykłady:

$$y = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 3x + 1}$$

$$y = \frac{x + 5}{x - 2}$$

$$y = \frac{x^3 + x^2 - 1}{5x^2 + 4}$$

- 
- spis treści
 - symbole
 - zgłoś błąd
 - 13 kwiecień



Dziedzina funkcji wymiernej

Dziedzinę funkcji wymiernej wyznaczamy znajdując **pierwiastki** mianownika.

Przykłady:

$$y = \frac{5}{x - 2}$$

dla $x = 2$ mianownik jest równy 0

$$D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$$



wszystkie liczby **rzeczywiste** oprócz 2.

$$y = \frac{2x + 4}{x^2 - 9}$$

dla $x = 3$ lub $x = -3$ mianownik jest równy 0

$$D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$$



wszystkie liczby **rzeczywiste** oprócz $-3, 3$.

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Hiperbola

Najprostsze funkcje wymierne.

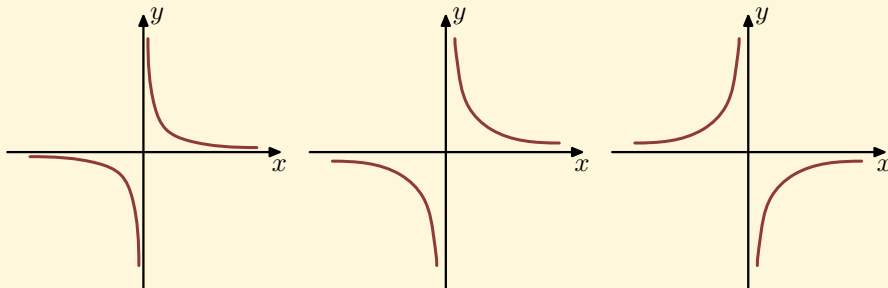
Przykłady:

$$y = \frac{1}{x}$$

$$y = \frac{2}{x}$$

$$y = \frac{-2}{x}$$

Wykres tych funkcji to hiperbola.



Asymptota to prosta do której wykres się zbliża, lecz jej nie dotyka.

Oś x to asymptota pozioma hiperboli.

Oś y to asymptota pionowa hiperboli.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Rozwiąż równania:

$$\triangleright \frac{6}{x+1} = 2$$

$$\triangleright \frac{4}{x} + \frac{6}{x+1} = 4$$

$$\triangleright \frac{x+2}{x} + \frac{2x-5}{x-4} = \frac{4}{x^2}$$

Rozwiąż nierówności:

$$\triangleright \frac{10}{x+3} \geq 2$$

$$\triangleright \frac{2x}{x+1} < \frac{3x+2}{x+4}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



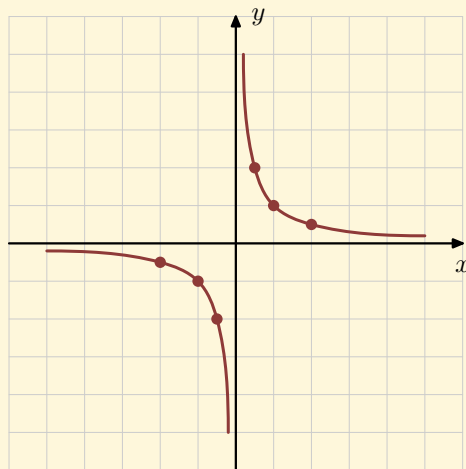
matma235@o2.pl

Narysuj wykres funkcji i wypisz jej własności:

$$y = \frac{1}{x}$$

Rozwiązanie:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$y = \frac{1}{x}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	2	1	$\frac{1}{2}$



własności funkcji



spis treści

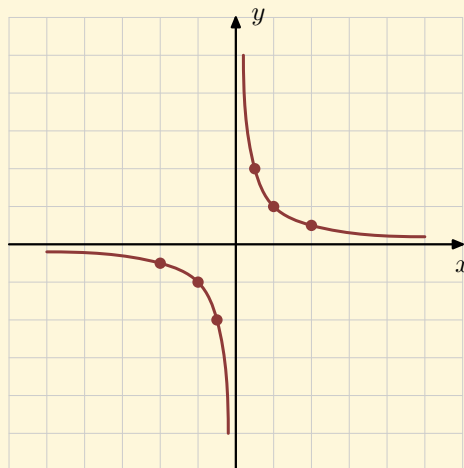
symbole

zgłosz błęd

13 kwiecień



matma235@o2.pl



dziedzina
zbiór wartości
miejsce zerowe
monotoniczność

różnowartościowość
parzystość
okresowość

$$D : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$
$$D^{-1} : y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

nie ma
funkcja jest przedziałami monotoniczna
malejąca dla $x \in (-\infty, 0)$
malejąca dla $x \in (0, \infty)$
funkcja jest różnowartościowa
funkcja jest nieparzysta
funkcja nie jest okresowa



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



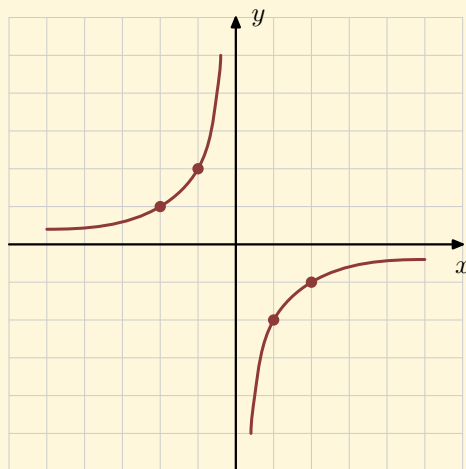
matma235@o2.pl

Narysuj wykres funkcji i wypisz jej własności:

$$y = \frac{-2}{x}$$

Rozwiązanie:

x	-2	-1	1	2
$y = \frac{-2}{x}$	1	2	-2	-1



własności funkcji



spis treści

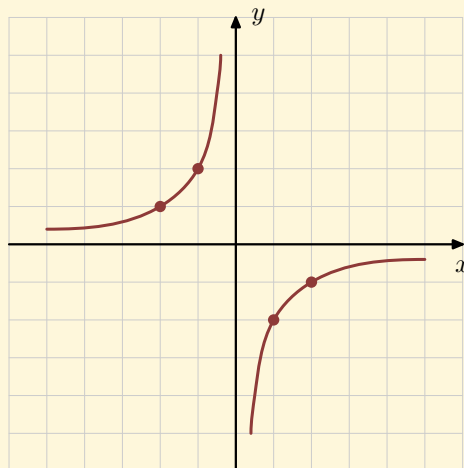
symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl



dziedzina
zbiór wartości
miejsce zerowe
monotoniczność

różnowartościowość
parzystość
okresowość

$$D : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$
$$D^{-1} : y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

nie ma
funkcja jest przedziałami monotoniczna
rosnąca dla $x \in (-\infty, 0)$
rosnąca dla $x \in (0, \infty)$
funkcja jest różnowartościowa
funkcja jest nieparzysta
funkcja nie jest okresowa



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

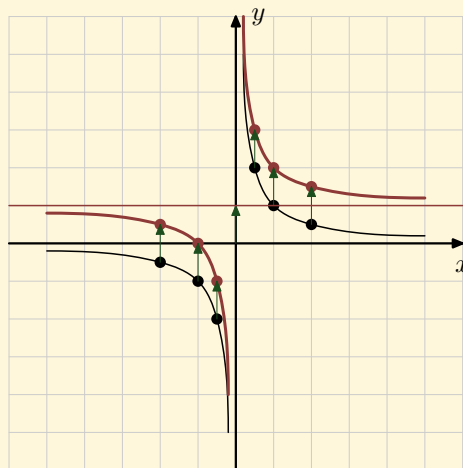
Narysuj wykres funkcji i wypisz jej własności:

$$y = \frac{1}{x} + 1$$

Rozwiązanie:

Wykres $y = \frac{1}{x} + 1$ otrzymujemy przez przesunięcie $y = \frac{1}{x}$ o wektor $[0, 1]$.

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$y = \frac{1}{x}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	2	1	$\frac{1}{2}$



własności funkcji



spis treści

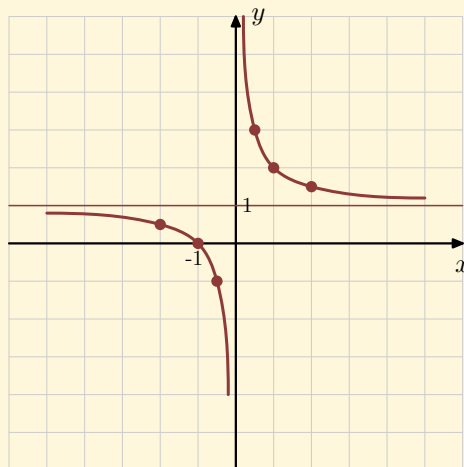
symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl



dziedzina

zbiór wartości

miejsce zerowe

monotoniczność

różnowartościowość

parzystość

okresowość

$$D : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$D^{-1} : y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$x_0 = -1$$

funkcja jest przedziałami monotoniczna

malejąca dla $x \in (-\infty, 0)$

malejąca dla $x \in (0, \infty)$

funkcja jest różnowartościowa

funkcja jest ani parzysta ani nieparzysta

funkcja nie jest okresowa



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

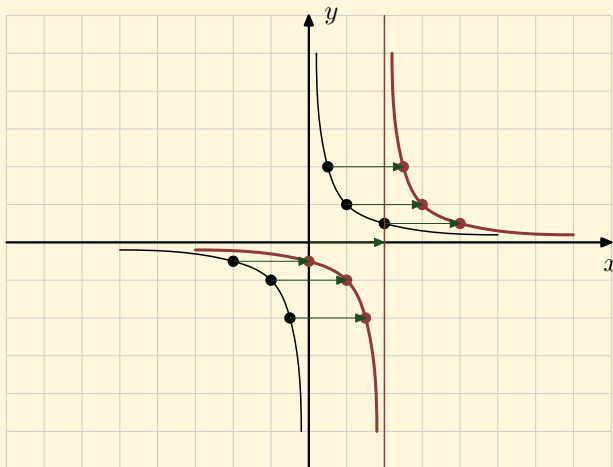
Narysuj wykres funkcji i wypisz jej własności:

$$y = \frac{1}{x-2}$$

Rozwiązanie:

Wykres $y = \frac{1}{x-2}$ otrzymujemy przez przesunięcie $y = \frac{1}{x}$ o wektor $[2, 0]$.

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$y = \frac{1}{x}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	2	1	$\frac{1}{2}$



własności funkcji



spis treści

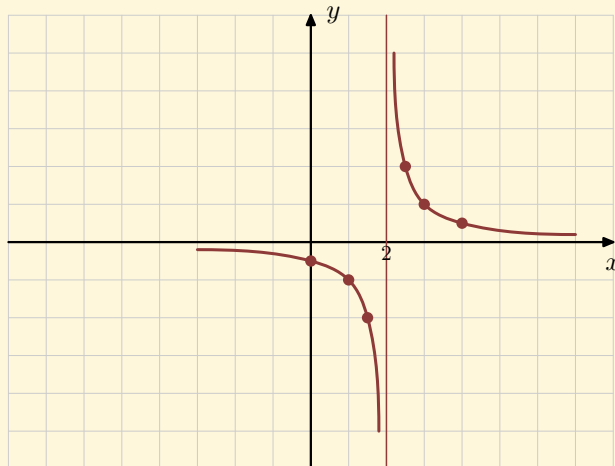
symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl



dziedzina
zbiór wartości
miejsce zerowe
monotoniczność

różnowartościowość
parzystość
okresowość

$$D : x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$$
$$D^{-1} : y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

nie ma
funkcja jest przedziałami monotoniczna
malejąca dla $x \in (-\infty, 2)$
malejąca dla $x \in \langle 2, \infty)$
funkcja jest różnowartościowa
funkcja jest ani parzysta ani nieparzysta
funkcja nie jest okresowa



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

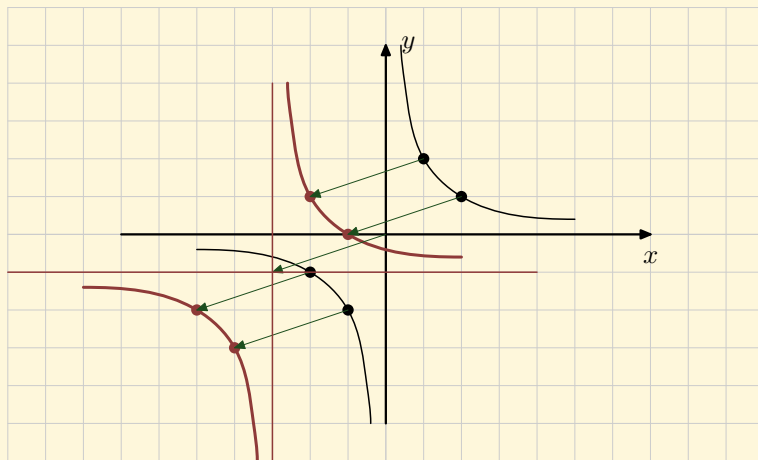
Narysuj wykres funkcji i wypisz jej własności:

$$y = \frac{2}{x+3} - 1$$

Rozwiązanie:

Wykres $y = \frac{2}{x+3} - 1$ otrzymujemy przez przesunięcie $y = \frac{2}{x}$ o wektor $[-3, -1]$.

x	-2	-1	1	2
$y = \frac{2}{x}$	-1	-2	2	1



własności funkcji



spis treści

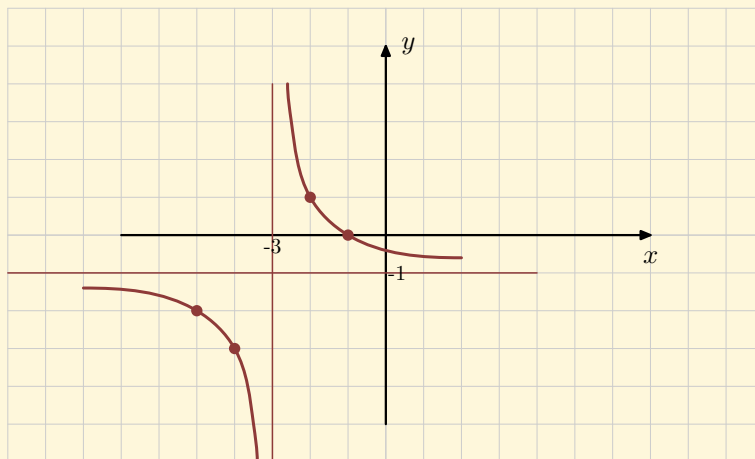
symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl



dziedzina

zbiór wartości

miejsce zerowe

monotoniczność

różnowartościowość

parzystość

okresowość

$$D : x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

$$D^{-1} : y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$x_0 = -1$$

funkcja jest przedziałami monotoniczna

malejąca dla $x \in (-\infty, -3)$

malejąca dla $x \in (-3, \infty)$

funkcja jest różnowartościowa

funkcja jest ani parzysta ani nieparzysta

funkcja nie jest okresowa



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Narysuj wykres funkcji i wypisz jej własności:

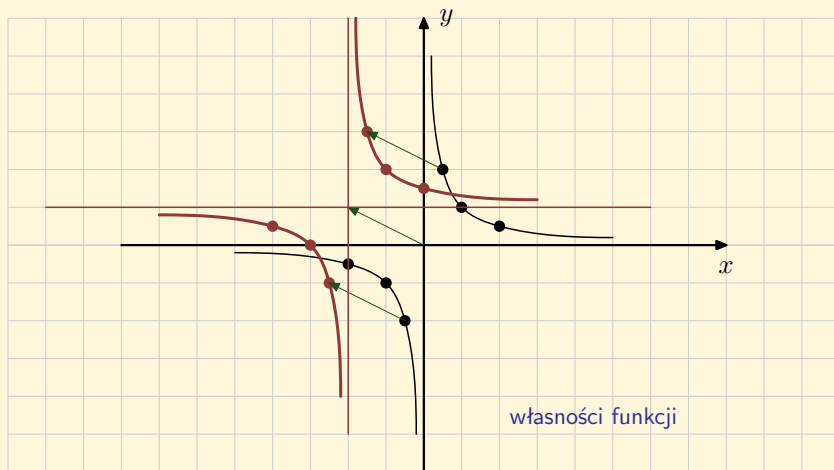
$$y = \frac{x+3}{x+2}$$

Rozwiązanie:

$$y = \frac{x+3}{x+2} = \frac{x+2+1}{x+2} = \frac{x+2}{x+2} + \frac{1}{x+2} = 1 + \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x+2} + 1$$

Wykres $y = \frac{1}{x+2} + 1$ otrzymujemy przez przesunięcie $y = \frac{1}{x}$ o wektor $[-2, 1]$.

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$y = \frac{1}{x}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	2	1	$\frac{1}{2}$





spis treści

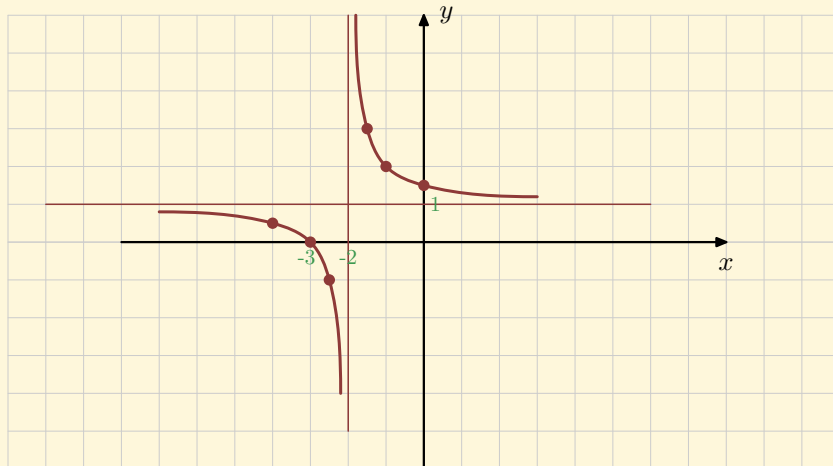
symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl



dziedzina

zbiór wartości

miejsce zerowe

monotoniczność

różnowartościowość

parzystość

okresowość

$$D : x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$$D^{-1} : y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$x_0 = -3$$

funkcja jest przedziałami monotoniczna

malejąca dla $x \in (-\infty, -2)$

malejąca dla $x \in (-2, \infty)$

funkcja jest różnowartościowa

funkcja jest ani parzysta ani nieparzysta

funkcja nie jest okresowa



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Narysuj wykres funkcji i wypisz jej własności:

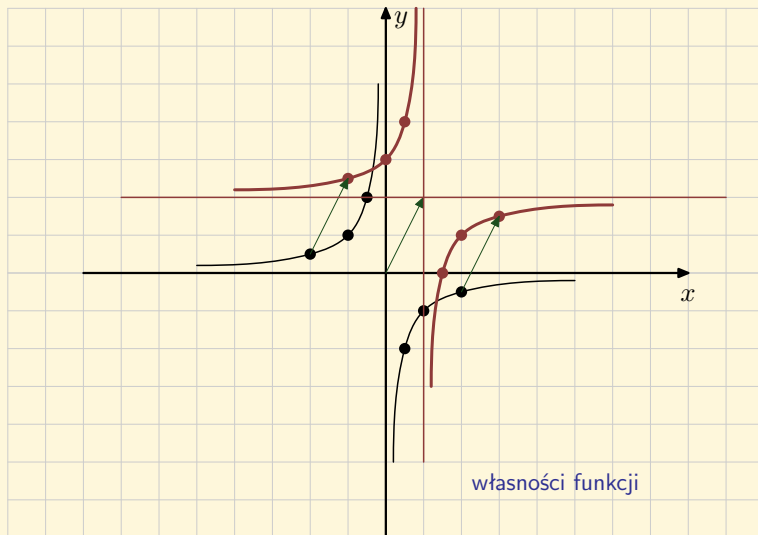
$$y = \frac{2x-3}{x-1}$$

Rozwiązanie:

$$y = \frac{2x-3}{x-1} = \frac{2(x-1)+2-3}{x-1} = \frac{2(x-1)-1}{x-1} = \frac{2(x-1)}{x-1} + \frac{-1}{x-1} = 2 + \frac{-1}{x-1} = \frac{-1}{x-1} + 2$$

Wykres $y = \frac{-1}{x-1} + 2$ otrzymujemy przez przesunięcie $y = \frac{-1}{x}$ o wektor $[1, 2]$.

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$y = \frac{-1}{x}$	$\frac{1}{2}$	1	2	-2	-1	$-\frac{1}{2}$





spis treści

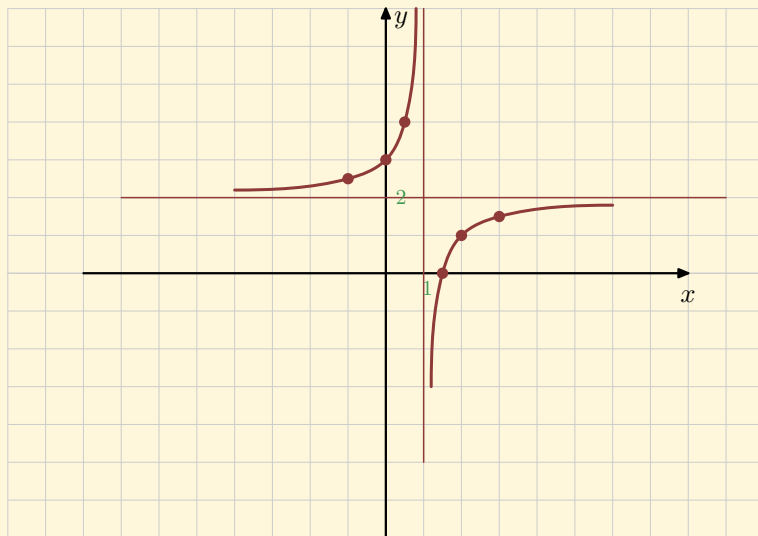
symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl



dziedzina

zbiór wartości

miejsce zerowe

monotoniczność

różnowartościowość

parzystość

okresowość

$$D : x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$D^{-1} : y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$x_0 = 1\frac{1}{2}$$

funkcja jest przedziałami monotoniczna

malejąca dla $x \in (-\infty, -2)$

malejąca dla $x \in (-2, \infty)$

funkcja jest różnowartościowa

funkcja jest ani parzysta ani nieparzysta

funkcja nie jest okresowa

wzory, twierdzenia, definicje

- funkcje wymierne
- dziedzina funkcji wymiernej
- hiperbola

przykłady

- 
- o spis treści
 - o symbole
 - zgłoś błąd
 - o 13 kwiecień





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Rozwiąż równanie:

$$\frac{6}{x+1} = 2$$

Rozwiązanie:

Wyznaczamy dziedzinę: $D : x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$

Przenosimy wszystko na lewą stronę:

$$\frac{6}{x+1} - 2 = 0$$

Sprawdzamy wszystkie ułamki do wspólnego mianownika:

$$\begin{aligned}\frac{6}{x+1} - \frac{2(x+1)}{x+1} &= 0 \\ \frac{6 - 2(x+1)}{x+1} &= 0\end{aligned}$$

Do wyznaczenia rozwiązania wystarczy znalezienie **pierwiastków** licznika:

$$\begin{aligned}6 - 2(x+1) &= 0 \\ 6 - 2x - 2 &= 0 \\ 4 - 2x &= 0 \\ -2x &= -4 \quad / : (-2) \\ x &= 2\end{aligned}$$

Liczba 2 należy do dziedziny.

Odp. $x = 2$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Rozwiąż równanie:

$$\frac{4}{x} + \frac{6}{x+1} = 4$$

Rozwiązanie:

Wyznaczamy **dziedzinę**: $D : x \in \mathbf{R} \setminus \{0, -1\}$

Przenosimy wszystko na lewą stronę:

$$\frac{4}{x} + \frac{6}{x+1} - 4 = 0$$

Sprowadzamy wszystkie ułamki do wspólnego mianownika:

$$\begin{aligned} \frac{4(x+1)}{x(x+1)} + \frac{6x}{(x+1)x} - \frac{4x(x+1)}{x(x+1)} &= 0 \\ \frac{4(x+1) + 6x - 4x(x+1)}{x(x+1)} &= 0 \end{aligned}$$

Do wyznaczenia rozwiązania wystarczy znaleźć **pierwiastków** licznika:

$$\begin{aligned} 4(x+1) + 6x - 4x(x+1) &= 0 \\ 4x + 4 + 6x - 4x^2 - 4x &= 0 \\ -4x^2 + 6x + 4 &= 0 \end{aligned}$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

Liczby 2 i $-\frac{1}{2}$ należą do dziedziny.

$$\text{Odp. } x_1 = 2 \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$-4x^2 + 6x + 4 = 0$$

$$\Delta = 6^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 4 = 36 + 64 = 100$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{100} = 10$$

$$x_1 = \frac{-6 - 10}{2 \cdot (-4)} = \frac{-16}{-8} = 2$$

$$x_2 = \frac{-6 + 10}{2 \cdot (-4)} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Rozwiąż równanie:

$$\frac{x+2}{x} + \frac{2x-5}{x-4} = \frac{4}{x^2}$$

Rozwiązanie:

Wyznaczamy dziedzinę: $D : x \in \mathbf{R} \setminus \{0, 4\}$

Przenosimy wszystko na lewą stronę:

$$\frac{x+2}{x} + \frac{2x-5}{x-4} - \frac{4}{x^2} = 0$$

Sprowadzamy wszystkie ułamki do wspólnego mianownika:

$$\begin{aligned} \frac{(x+2) \cdot x(x-4)}{x \cdot x(x-4)} + \frac{(2x-5) \cdot x^2}{(x-4) \cdot x^2} - \frac{4 \cdot (x-4)}{x^2 \cdot (x-4)} &= 0 \\ \frac{(x+2)x(x-4) + (2x-5)x^2 - 4(x-4)}{x^2(x-4)} &= 0 \end{aligned}$$

Do wyznaczenia rozwiązania wystarczy znaleźć **pierwiastków** licznika:

$$(x+2)x(x-4) + (2x-5)x^2 - 4(x-4) = 0$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = \frac{2-2\sqrt{13}}{3} \quad x_3 = \frac{2+2\sqrt{13}}{3}$$

Rozwiązania x_1, x_2, x_3 należą do dziedziny.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

$$(x+2)x(x-4) + (2x-5)x^2 - 4(x-4) = 0$$

$$(x+2)(x^2-4x) + 2x^3 - 5x^2 - 4x + 16 = 0$$

$$x^3 - 4x^2 + 2x^2 - 4x + 2x^3 - 5x^2 - 4x + 16 = 0$$

$$x^3 + 2x^3 - 4x^2 + 2x^2 - 5x^2 - 4x - 4x + 16 = 0$$

$$3x^3 - 7x^2 - 12x + 16 = 0$$

Rozkładamy wielomian na **czynniki**, korzystając z **twierdzenia** o pierwiastkach wymiernych.

$$3x^3 - 7x^2 - 12x + 16 = 0$$

Dzielniki 16 to: $-1, 1, -2, 2, -4, 4, -8, 8, -16, 16$

$$w(-1) = 3(-1)^3 - 7(-1)^2 - 12(-1) + 16 = -3 - 7 + 12 + 16 = 18$$

$$w(1) = 1^3 - 7 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 16 = 3 - 7 - 12 + 16 = 0$$

Liczba 1 jest **pierwiastkiem** wielomianu, a więc zgodnie z **twierdzeniem** Bézout wielomian $3x^3 - 7x^2 - 12x + 16$ **dzieli** się na $x - 1$ bez reszty.

$$3x^3 - 7x^2 - 12x + 16 = (x-1)(3x^2 - 4x - 16)$$

$$(x-1)(3x^2 - 4x - 16) = 0$$

$$x_1 = 1 \quad 3x^2 - 4x - 16 = 0$$

$$x_2 = \frac{2 - 2\sqrt{13}}{3} \quad x_3 = \frac{2 + 2\sqrt{13}}{3}$$

$$\begin{array}{r}
 (3x^3 - 7x^2 - 12x + 16) : (x - 1) = 3x^2 - 4x - 16 \\
 \underline{-3x^3 + 3x^2} \\
 = -4x^2 - 12x \\
 \underline{4x^2 - 4x} \\
 = -16x + 16 \\
 \underline{16x - 16} \\
 = =
 \end{array}$$

- ◉ spis treści
- ◉ symbole
- ◉ zgłoś błąd
- ◉ 13 kwiecień



matma235@o2.pl



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

$$3x^2 - 4x - 16 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-16) = 16 + 192 = 208$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{208} = \sqrt{16 \cdot 13} = 4\sqrt{13}$$

$$x_1 = \frac{-(-4) - 4\sqrt{13}}{2 \cdot 3} = \frac{4 - 4\sqrt{13}}{2 \cdot 3} = \frac{2(2 - 2\sqrt{13})}{2 \cdot 3} = \frac{2 - 2\sqrt{13}}{3}$$

$$x_2 = \frac{-(-4) + 4\sqrt{13}}{2 \cdot 3} = \frac{4 + 4\sqrt{13}}{2 \cdot 3} = \frac{2(2 + 2\sqrt{13})}{2 \cdot 3} = \frac{2 + 2\sqrt{13}}{3}$$



matma235@o2.pl



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Rozwiąż równanie:

$$\frac{10}{x+3} \geq 2$$

Rozwiązanie:

Wyznaczamy dziedzinę: $D : x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

Przenosimy wszystko na lewą stronę:

$$\frac{10}{x+3} - 2 \geq 0 \quad \text{po uproszczeniu:} \quad \frac{-2x+4}{x+3} \geq 0$$

Zamiast ułamka możemy napisać iloczyn. Otrzymujemy nierówność wielomianową.

$$(-2x+4)(x+3) \geq 0$$

$$-2(x-2)(x+3) \geq 0$$

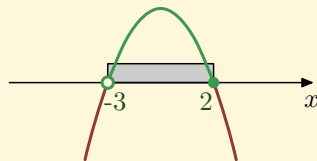
$$x_1 = 2 \quad x_2 = -3$$

$$1 \quad 1$$

pierwiastki:

krotność:

Liczba -3 nie należy do dziedziny co zaznaczamy $\circ$



$$x \in (-3, 2]$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$\frac{10}{x+3} - 2 \geq 0$$

Sprawdzamy do wspólnego mianownika:

$$\frac{10}{x+3} - \frac{2(x+3)}{x+3} \geq 0$$

$$\frac{10 - 2(x+3)}{x+3} \geq 0$$

$$\frac{10 - 2x - 6}{x+3} \geq 0$$

$$\frac{-2x + 4}{x+3} \geq 0$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Rozwiąż równanie:

$$\frac{2x}{x+1} < \frac{3x+2}{x+4}$$

Rozwiązanie:

Wyznaczamy **dziedzinę**: $D : x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, -4\}$

Przenosimy wszystko na lewą stronę:

$$\frac{2x}{x+1} - \frac{3x+2}{x+4} < 0 \quad \text{po uproszczeniu:} \quad \frac{-x^2 + 3x - 2}{(x+1)(x+4)} < 0$$

Zamiast ułamka możemy napisać iloczyn. Otrzymujemy
nierówność wielomianową.

$$(-x^2 + 3x - 2)(x+1)(x+4) < 0$$

$$-x^2 + 3x - 2 = -(x-1)(x-2)$$

$$-(x-2)(x-1)(x+1)(x+4) < 0$$

pierwiastki:

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = -1$$

$$x_4 = -4$$

krotność:

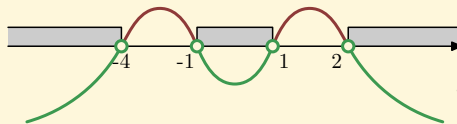
1

1

1

1

Liczby -1 , -4 nie należą do dziedziny co zaznaczymy $\circ$. Przy liczbach 1 , -1 też jest $\circ$ ze względu na **znak** $<$.



$$x \in (-\infty, -4) \cup (-1, 1) \cup (2, \infty)$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$\frac{2x}{x+1} - \frac{3x+2}{x+4} < 0$$

Sprawdzamy wszystkie ułamki do wspólnego mianownika:

$$\frac{2x(x+4)}{(x+1)(x+4)} - \frac{(3x+2)(x+1)}{(x+4)(x+1)} < 0$$

$$\frac{2x(x+4) - (3x+2)(x+1)}{(x+1)(x+4)} < 0$$

$$\frac{2x^2 + 8x - (3x^2 + 3x + 2x + 2)}{(x+1)(x+4)} < 0$$

$$\frac{2x^2 + 8x - 3x^2 - 3x - 2x - 2}{(x+1)(x+4)} < 0$$

$$\frac{-x^2 + 3x - 2}{(x+1)(x+4)} < 0$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$-x^2 + 3x - 2$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2) = 9 - 8 = 1$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{1} = 1$$

$$x_1 = \frac{-3 - 1}{2 \cdot (-1)} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-3 + 1}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2}{-2} = 1$$

postać iloczynowa: $-(x - 2)(x - 1)$

$$-x^2 + 3x - 2 = -(x - 2)(x - 1)$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Wzory:

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \left(\frac{b}{a}\right)^x$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

Potęgowanie

Przykłady:

$$2^0 = 1 \qquad 5^0 = 1 \qquad (-3)^0 = 1$$

$$2^1 = 2 \qquad 5^1 = 1 \qquad (-3)^1 = -3$$

$$2^{-1} = \frac{1}{2} \qquad 5^{-4} = \frac{1}{5^4} \qquad (-3)^{-8} = \frac{1}{(-3)^8}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2} \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{1}\right)^3 \qquad \left(-\frac{10}{7}\right)^{-2} = \left(-\frac{7}{10}\right)^2$$

$$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

$$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$9^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{9})^3 = 3^3 = 27$$

$$4^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{4})^2 = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16}$$

$$2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$$

$$3^4 \cdot 3^{-3} = 3^{4+(-3)} = 3^1 = 3$$

$$\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2 = 4$$

$$\frac{3^4}{3^6} = 3^{4-6} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12} = 4096$$

$$(3^{2\frac{1}{2}})^2 = 3^{2\frac{1}{2} \cdot 2} = 3^5 = 243$$

$$(3\sqrt{5})^2 = 3^2 \cdot (\sqrt{5})^2 = 9 \cdot 5 = 45$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{(\sqrt{3})^2}{2^2} = \frac{3}{4}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



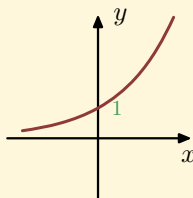
matma235@o2.pl

Funkcja wykładnicza

Funkcja wykładnicza o podstawie $a > 0$ i $a \neq 1$:

$$y = a^x$$

Dla $a > 1$ funkcja wykładnicza jest rosnąca:



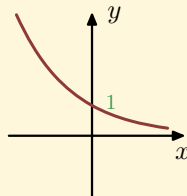
Przykłady:

$$y = 3^x$$

$$y = 5^x$$

$$y = (2\frac{1}{2})^x$$

Dla $0 < a < 1$ funkcja wykładnicza jest malejąca:



Przykłady:

$$y = (\frac{1}{2})^x$$

$$y = (\frac{2}{3})^x$$

$$y = (0,4)^x$$

funkcja wykładnicza jest różnowartościowa



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz:

$$\triangleright \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$$

$$\triangleright 2^{-3}$$

$$\triangleright \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$$

$$\triangleright \left(2\frac{2}{3}\right)^{-2}$$

$$\triangleright (1,5)^{-3}$$

$$\triangleright 81^{\frac{1}{2}}$$

$$\triangleright (0,04)^{\frac{1}{2}}$$

$$\triangleright 16^{\frac{3}{2}}$$

$$\triangleright 8^{\frac{2}{3}}$$

$$\triangleright 8^{\frac{3}{2}}$$

$$\triangleright (0,16)^{-1,5}$$

Oblicz:

$$\triangleright 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-2}$$

$$\triangleright 2^{\frac{1}{3}} \cdot 4^3 \cdot 2^{-4}$$

$$\triangleright 4^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\triangleright \frac{8^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{32}}{4^{1,5}}$$

$$\triangleright \frac{9^{\frac{1}{3}} \cdot 27^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^0$$

Rozwiązanie:

Na podstawie wzorów:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz:

$$2^{-3}$$

Rozwiązanie:

Na podstawie wzorów:

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

matma235@o2.pl



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$$

Rozwiązanie:

Na podstawie wzorów:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz:

$$\left(2\frac{2}{3}\right)^{-2}$$

Rozwiązanie:

Na podstawie wzorów:

$$\left(2\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{8}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz:

$$1,5^{-3}$$

Rozwiązanie:

Na podstawie wzorów:

$$1,5^{-3} = \left(1\frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz:

$$81^{\frac{1}{2}}$$

Rozwiązanie:

Na podstawie wzorów:

$$81^{\frac{1}{2}} = \sqrt{81} = 9$$

matma235@o2.pl



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz:

$$(0,04)^{\frac{1}{2}}$$

Rozwiązanie:

Na podstawie wzorów:

$$(0,04)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{4}{100}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{4}{100}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{100}} = \frac{2}{10}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz:

$$16^{\frac{3}{2}}$$

Rozwiązanie:

Na podstawie wzorów:

$$16^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{16}\right)^3 = 4^3 = 64$$

matma235@o2.pl

Oblicz:

Rozwiązanie:

Na podstawie wzorów:

$$8^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4$$

- 
- spis treści
 - symbole
 - zgłoś błąd
 - 13 kwiecień





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz:

$$8^{\frac{3}{2}}$$

Rozwiązanie:

Na podstawie wzorów:

$$8^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{8})^3 = (\sqrt{8})^2 \cdot (\sqrt{8}) = 8\sqrt{8} = 8\sqrt{4 \cdot 2} = 8\sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 8 \cdot 2\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz:

$$(0,16)^{-1,5}$$

Rozwiązanie:

Na podstawie wzorów:

$$\begin{aligned}(0,16)^{-1,5} &= \left(\frac{16}{100}\right)^{-1,5} = \left(\frac{100}{16}\right)^{1,5} = \left(\frac{100}{16}\right)^{1\frac{1}{2}} = \left(\frac{100}{16}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{\frac{100}{16}}\right)^3 = \\ &= \left(\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{16}}\right)^3 = \left(\frac{10}{4}\right)^3 = \frac{1000}{64} = 15\frac{40}{64} = 15\frac{5}{8}\end{aligned}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz:

$$2^3 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-2}$$

Rozwiązanie:

Na podstawie wzorów:

$$2^3 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-2} = 2^{3+\frac{1}{2}-2} = 2^{1\frac{1}{2}} = 2^{1+\frac{1}{2}} = 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz:

$$2^{\frac{1}{3}} \cdot 4^3 \cdot 2^{-4}$$

Rozwiązanie:

Na podstawie wzorów:

$$2^{\frac{1}{3}} \cdot 4^3 \cdot 2^{-4} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot (2^2)^3 \cdot 2^{-4} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^6 \cdot 2^{-4} = 2^{\frac{1}{3}+6-4} = 2^{2\frac{1}{3}} = 2^{2+\frac{1}{3}} = 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 4\sqrt[3]{2}$$

matma235@o2.pl



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz:

$$4^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{4}$$

Rozwiązanie:

Na podstawie wzorów:

$$\begin{aligned} 4^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{4} &= (2^2)^{\frac{1}{3}} \cdot (2^3)^{\frac{2}{3}} \cdot 4^{-1} = 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{6}{3}} \cdot (2^2)^{-1} = 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^2 \cdot 2^{-2} = \\ &= 2^{\frac{2}{3}+2-2} = 2^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{2})^2 = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4} \end{aligned}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz:

$$\frac{8^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{32}}{4^{1,5}}$$

Rozwiązanie:

Na podstawie wzorów:

$$\frac{8^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{32}}{4^{1,5}} = \frac{(2^3)^{\frac{1}{2}} \cdot 32^{\frac{1}{2}}}{(2^2)^{1,5}} = \frac{2^{\frac{3}{2}} \cdot (2^5)^{\frac{1}{2}}}{2^3} = \frac{2^{\frac{3}{2} + \frac{5}{2}}}{2^3} = \frac{2^{\frac{8}{2}}}{2^3} = \frac{2^4}{2^3} = 2^{4-3} = 2^1 = 2$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz:

$$\frac{9^{\frac{1}{3}} \cdot 27^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}}$$

Rozwiązanie:

Na podstawie wzorów:

$$\begin{aligned}\frac{9^{\frac{1}{3}} \cdot 27^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}} &= \frac{(3^2)^{\frac{1}{3}} \cdot (3^3)^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{3^{\frac{2}{3} + \frac{3}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{3^{\frac{4}{6} + \frac{9}{6}}}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{3^{\frac{13}{6}}}{3^{\frac{1}{2}}} = 3^{\frac{13}{6} - \frac{1}{2}} = \\ &= 3^{\frac{13}{6} - \frac{3}{6}} = 3^{\frac{10}{6}} = 3^{\frac{5}{3}} = 3^{1\frac{2}{3}} = 3^1 \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 3(\sqrt[3]{3})^2 = 3\sqrt[3]{3^2} = 3\sqrt[3]{9}\end{aligned}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Rozwiąż równanie:

$$4^{x+2} = 8^{3x-1}$$

Rozwiązanie:

Wykorzystując wzory, należy doprowadzić potęgi w równaniu do jednakowych podstaw:

$$4^{x+2} = 8^{3x-1}$$

$$(2^2)^{x+2} = (2^3)^{3x-1}$$

$$2^{2(x+2)} = 2^{3(3x-1)}$$

$$2^{2x+4} = 2^{9x-3}$$

Funkcja wykładnicza jest różnowartościowa, a więc możemy zapisać:

$$2x + 4 = 9x - 3$$

$$2x - 9x = -3 - 4$$

$$-7x = -7 / : (-7)$$

$$x = 1$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Rozwiąż równanie:

$$(0, 25)^{2x-1} = (\sqrt{8})^{x+4}$$

Rozwiązanie:

Wykorzystując wzory, należy doprowadzić potęgi w równaniu do jednakowych podstaw:

$$(0, 25)^{2x-1} = (\sqrt{8})^{x+4}$$

$$\left(\frac{25}{100}\right)^{2x-1} = (8^{\frac{1}{2}})^{x+4}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1} = (8^{\frac{1}{2}})^{x+4}$$

$$(4^{-1})^{2x-1} = (8^{\frac{1}{2}})^{x+4}$$

$$4^{-1(2x-1)} = 8^{\frac{1}{2}(x+4)}$$

$$4^{-2x+1} = 8^{\frac{1}{2}x+2}$$

$$(2^2)^{-2x+1} = (2^3)^{\frac{1}{2}x+2}$$

$$2^{2(-2x+1)} = 2^{3(\frac{1}{2}x+2)}$$

$$2^{-4x+2} = 2^{\frac{3}{2}x+6}$$

Funkcja wykładnicza jest różnowartościowa, a więc możemy zapisać:

$$-4x + 2 = \frac{3}{2}x + 6$$

dalej



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$-4x + 2 = \frac{3}{2}x + 6$$

$$-4x - \frac{3}{2}x = 6 - 2$$

$$-4x - 1\frac{1}{2}x = 4$$

$$-5\frac{1}{2}x = 4 / : (-5\frac{1}{2})$$

$$x = 4 : (-5\frac{1}{2})$$

$$x = 4 : \left(-\frac{11}{2}\right)$$

$$x = 4 \cdot \left(-\frac{2}{11}\right)$$

$$x = -\frac{8}{11}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Rozwiąż równanie:

$$9^{2x+3} = 3\sqrt{27}$$

Rozwiązanie:

Wykorzystując wzory, należy doprowadzić potęgi w równaniu do jednakowych podstaw:

$$9^{2x+3} = 3\sqrt{27}$$

$$(3^2)^{2x+3} = 3 \cdot 27^{\frac{1}{2}}$$

$$3^{2(2x+3)} = 3 \cdot (3^3)^{\frac{1}{2}}$$

$$3^{4x+6} = 3 \cdot 3^{\frac{3}{2}}$$

$$3^{4x+6} = 3 \cdot 3^{1\frac{1}{2}}$$

$$3^{4x+6} = 3^{1+1\frac{1}{2}}$$

$$3^{4x+6} = 3^{2\frac{1}{2}}$$

Funkcja wykładnicza jest różnowartościowa, a więc możemy zapisać:

$$4x + 6 = 2\frac{1}{2}$$

$$4x = 2\frac{1}{2} - 6$$

$$4x = -3\frac{1}{2} / : 4$$

$$x = -3\frac{1}{2} : 4$$

$$x = -\frac{7}{2} \cdot \frac{1}{4}$$

$$x = -\frac{7}{8}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Rozwiąż nierówność:

$$3^{3x-1} < 3^{2x+4}$$

Rozwiązanie:

Podstawy potęg są jednakowe i większe od 1. Funkcja **wykładnicza** jest więc **rosnąca**, dlatego **nie odwracamy** znaku nierówności.

$$3x - 1 < 2x + 4$$

$$3x - 2x < 4 + 1$$

$$x < 5$$

Rozwiąż nierówność:

$$(0, 2)^{4x-1} < (0, 2)^{x+2}$$

Rozwiązanie:

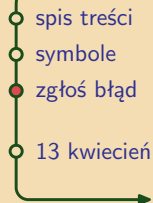
Podstawy potęg są jednakowe i mniejsze od 1. Funkcja **wykładnicza** jest więc **malejąca**, dlatego **odwracamy** znak nierówności.

$$4x - 1 > x + 2$$

$$4x - x > 2 + 1$$

$$3x > 3 \quad / : 3$$

$$x > 1$$

- 
- spis treści
 - symbole
 - zgłoś błąd
 - 13 kwiecień





matma235@o2.pl

Rozwiąż nierówność:

$$(0,125)^x \geq 4^{x-3}$$

Rozwiązanie:

Wykorzystując wzory, należy doprowadzić potęgi w nierówności do jednakowych podstaw:

$$\left(\frac{125}{1000}\right)^x \geq (2^2)^{x-3}$$

$$\left(\frac{1}{8}\right)^x \geq 2^{2(x-3)}$$

$$(8^{-1})^x \geq 2^{2x-6}$$

$$8^{-x} \geq 2^{2x-6}$$

$$(2^3)^{-x} \geq 2^{2x-6}$$

$$2^{-3x} \geq 2^{2x-6}$$

Podstawy potęg są jednakowe i większe od 1. Funkcja wykładnicza jest więc rosnąca, dlatego nie odwracamy znaku nierówności.

$$-3x \geq 2x - 6$$

$$-3x - 2x \geq -6$$

$$-5x \geq -6 \quad / : (-5)$$

$$x \leq \frac{6}{5}$$

$$x \leq 1\frac{1}{5}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Rozwiąż nierówność:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{4x-2} > \left(\frac{9}{4}\right)^{2x-3}$$

Rozwiązanie:

Wykorzystując **wzory**, należy doprowadzić potęgi w nierówności do jednakowych podstaw:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{4x-2} > \left(\frac{9}{4}\right)^{2x-3}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{4x-2} > \left(\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)^{2x-3}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{4x-2} > \left(\frac{3}{2}\right)^{2(2x-3)}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{4x-2} > \left(\frac{3}{2}\right)^{4x-6}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{4x-2} > \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right)^{4x-6}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{4x-2} > \left(\frac{2}{3}\right)^{-1(4x-6)}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{4x-2} > \left(\frac{2}{3}\right)^{-4x+6}$$

Podstawy potęg są jednakowe i mniejsze od 1. Funkcja **wykładnicza** jest więc **malejąca**, dlatego **odwracamy** znak nierówności.

$$4x - 2 < -4x + 6$$

dalej



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$4x - 2 < -4x + 6$$

$$4x + 4x < 6 + 2$$

$$8x < 8 / : 8$$

$$x < 1$$

matma235@o2.pl



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Rozwiąż nierówność:

$$4(\sqrt{8})^{x-3} \leq \left(\frac{2\sqrt{2}}{16}\right)^{1-x}$$

Rozwiązanie:

Wykorzystując **wzory**, należy doprowadzić potęgi w nierówności do jednakowych podstaw:

$$4(\sqrt{8})^{x-3} \leq \left(\frac{2\sqrt{2}}{16}\right)^{1-x}$$

$$2^2 \cdot (8^{\frac{1}{2}})^{x-3} \leq \left(\frac{2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{2^4}\right)^{1-x}$$

$$2^2 \cdot 8^{\frac{1}{2}(x-3)} \leq \left(\frac{2^{1+\frac{1}{2}}}{2^4}\right)^{1-x}$$

$$2^2 \cdot (2^3)^{\frac{1}{2}(x-3)} \leq \left(\frac{2^{1\frac{1}{2}}}{2^4}\right)^{1-x}$$

$$2^2 \cdot 2^{\frac{3}{2}(x-3)} \leq (2^{1\frac{1}{2}-4})^{1-x}$$

$$2^{2+\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}} \leq (2^{-2\frac{1}{2}})^{(1-x)}$$

$$2^{2+\frac{3}{2}x-4\frac{1}{2}} \leq 2^{-2\frac{1}{2}(1-x)}$$

Podstawy potęg są jednakowe i większe od 1. Funkcja **wykładnicza** jest więc **rosnąca**, dlatego **nie odwracamy** znaku nierówności.

$$2 + \frac{3}{2}x - 4\frac{1}{2} \leq -2\frac{1}{2}(1-x)$$

dalej



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$2 + \frac{3}{2}x - 4\frac{1}{2} \leq -2\frac{1}{2}(1 - x)$$

$$2 - 4\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x \leq -2\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}x$$

$$-2\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x \leq -2\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}x$$

$$\frac{3}{2}x - 2\frac{1}{2}x \leq -2\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}x \leq 0$$

$$-\frac{2}{2}x \leq 0$$

$$-x \leq 0 / : (-1)$$

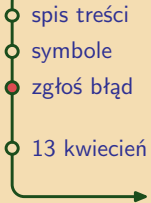
$$x \geq 0$$

Logarytmy

wzory, twierdzenia, definicje

- logarytm
- wykres funkcji logarytmicznej
- wzory

przykłady

- 
- o spis treści
 - o symbole
 - zgłoś błąd
 - o 13 kwiecień



Logarytm

Przykłady:

$$\log_2 8$$

logarytm o podstawie 2 z 8

$$\log_4 16$$

logarytm o podstawie 4 z 16

$$\log 1000$$

logarytm dziesiętny z 1000 (ma w podstawie 10)

logarytm o podstawie a z liczby b :

$$\log_a b$$

warunki dla podstawy a : $a > 0$ i $a \neq 1$

warunki dla liczby b : $b > 0$

Definicja logarytmu:

$$\log_a b = x \quad \text{jeżeli} \quad a^x = b$$

Przykłady:

$$\log_2 8 = 3$$

dlatego, że $2^3 = 8$

$$\log_4 16 = 2$$

dlatego, że $4^2 = 16$

$$\log 1000 = 3$$

dlatego, że $10^3 = 1000$





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Wzory:

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a a^k = k$$

$$\log_a x^k = k \log_a x$$

$$a^{\log_a x} = x$$

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

c – dowolna liczba spełniająca warunki

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Wzory

Przykłady:

$$\log_3 1 = 0$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$$

$$\log_3 3 = 1$$

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1$$

$$\log_2 2^3 = 3$$

$$\log_5 5^3 = 3$$

$$\log_3 2^5 = 5 \log_3 2$$

$$\log 3^4 = 4 \log 3$$

$$3^{\log_3 5} = 5$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 7} = 7$$

$$\log_2 (3 \cdot 5) = \log_2 3 + \log_2 5$$

$$\log_3 (9\sqrt{3}) = \log_3 9 + \log_3 \sqrt{3}$$

$$\log_2 \frac{3}{5} = \log_2 3 - \log_2 5$$

$$\log_3 \frac{\sqrt{3}}{9} = \log_3 \sqrt{3} - \log_3 9$$

$$\log_2 3 = \frac{\log_{11} 3}{\log_{11} 2}$$

$$\log_2 3 = \frac{\log_{15} 3}{\log_{15} 2}$$

$$\log_3 8 = \frac{1}{\log_8 3}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

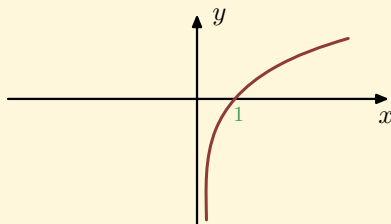
Wykres funkcji logarytmicznej

Wykres funkcji logarytmicznej:

$$y = \log_a x$$

zależy od podstawy a .

Dla $a > 1$ funkcja logarytmiczna jest rosnąca:



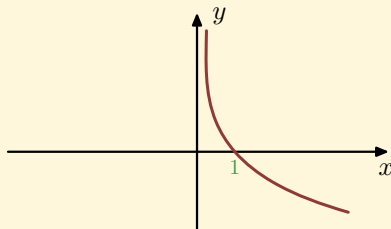
Przykłady:

$$y = \log_2 x$$

$$y = \log_5 x$$

$$y = \log_{\sqrt{2}} x$$

Dla $0 < a < 1$ funkcja logarytmiczna jest malejąca:



Przykłady:

$$y = \log_{0,3} x$$

$$y = \log_{\frac{1}{2}} x$$

Funkcja logarytmiczna jest różnowartościowa



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz:

- | | | | |
|-----------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------|---------------------------|
| $\triangleright \log_3 9$ | $\triangleright \log_3 \frac{1}{3}$ | $\triangleright \log_2 0,5$ | $\triangleright \log_4 4$ |
| $\triangleright \log_5 \sqrt{5}$ | $\triangleright \log_3 1$ | $\triangleright \log 100$ | $\triangleright \log 0,1$ |
| $\triangleright \log \sqrt{1000}$ | $\triangleright \log_5 0,04$ | | |

Oblicz:

- | | | | |
|-----------------------------------|------------------------------------|---|--|
| $\triangleright \log_2 2\sqrt{2}$ | $\triangleright \log_3 9\sqrt{27}$ | $\triangleright \log_5 \frac{\sqrt{5}}{25}$ | $\triangleright \log \frac{10\sqrt{10}}{1000}$ |
|-----------------------------------|------------------------------------|---|--|

Oblicz:

- | | | | |
|---------------------------|------------------------------|---------------------------------------|-------------------------------------|
| $\triangleright \log_4 8$ | $\triangleright \log_{25} 5$ | $\triangleright \log_{\sqrt{10}} 100$ | $\triangleright \log_{2\sqrt{2}} 4$ |
|---------------------------|------------------------------|---------------------------------------|-------------------------------------|



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz:

$$\log_3 9$$

Rozwiązanie:

Wykorzystując wzory, doprowadzamy logarytm do postaci: $\log_a a^k = k$

$$\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$$

matma235@o2.pl



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz:

$$\log_3 \frac{1}{3}$$

Rozwiązanie:

Wykorzystując wzory, doprowadzamy logarytm do postaci: $\log_a a^k = k$

$$\log_3 \frac{1}{3} = \log_3 3^{-1} = -1$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz:

$$\log_2 0,5$$

Rozwiązanie:

Wykoszystując wzory, doprowadzamy logarytm do postaci: $\log_a a^k = k$

$$\log_2 0,5 = \log_2 \frac{1}{2} = \log 2^{-1} = -1$$

matma235@o2.pl



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz:

$$\log_4 4$$

Rozwiązanie:

Wykorzystując wzory, doprowadzamy logarytm do postaci: $\log_a a^k = k$

$$\log_4 4 = \log_4 4^1 = 1$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz:

$$\log_5 \sqrt{5}$$

Rozwiązanie:

Wykorzystując wzory, doprowadzamy logarytm do postaci: $\log_a a^k = k$

$$\log_5 \sqrt{5} = \log_5 5^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz:

$$\log_3 1$$

Rozwiązanie:

Wykorzystując wzory, doprowadzamy logarytm do postaci: $\log_a a^k = k$

$$\log_3 1 = \log_3 3^0 = 0$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz:

$$\log 100$$

Rozwiązanie:

Wykoszystując wzory, doprowadzamy logarytm do postaci: $\log_a a^k = k$

$$\log 100 = \log 10^2 = 2$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz:

$$\log 0,1$$

Rozwiązanie:

Wykoszystując wzory, doprowadzamy logarytm do postaci: $\log_a a^k = k$

$$\log 0,1 = \log \frac{1}{10} = \log 10^{-1} = -1$$

matma235@o2.pl



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz:

$$\log \sqrt{1000}$$

Rozwiązanie:

Wykoszystując wzory doprowadzamy logarytm do postaci: $\log_a a^k = k$

$$\log \sqrt{1000} = \log 1000^{\frac{1}{2}} = \log(10^3)^{\frac{1}{2}} = \log 10^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

matma235@o2.pl



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwietnia



Oblicz:

$$\log_5 0,04$$

Rozwiązanie:

Wykoszystując wzory doprowadzamy logarytm do postaci: $\log_a a^k = k$

$$\log_5 0,04 = \log_5 \frac{4}{100} = \log_5 \frac{1}{25} = \log_5 25^{-1} = \log_5 (5^2)^{-1} = \log_5 5^{-2} = -2$$

matma235@o2.pl



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz:

$$\log_2 2\sqrt{2}$$

Rozwiązanie:

Wykorzystujemy $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$, a następnie za pomocą **wzorów**, doprowadzamy logarytm do postaci: $\log_a a^k = k$

$$\log 2\sqrt{2} = \log_2 2 + \log_2 \sqrt{2} = 1 + \log_2 2^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz:

$$\log_3 9\sqrt{27}$$

Rozwiązanie:

Wykorzystujemy $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$, a następnie za pomocą wzorów, doprowadzamy logarytm do postaci: $\log_a a^k = k$

$$\begin{aligned}\log_3 9\sqrt{27} &= \log_3 9 + \log_3 \sqrt{27} = \log_3 3^2 + \log_3 27^{\frac{1}{2}} = 2 + \log_3 (3^3)^{\frac{1}{2}} = \\ &= 2 + \log_3 3^{\frac{3}{2}} = 2 + \frac{3}{2} = 2 + 1\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}\end{aligned}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz:

$$\log_5 \frac{\sqrt{5}}{25}$$

Rozwiązanie:

Wykorzystujemy $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, a następnie za pomocą wzorów, doprowadzamy

logarytm do postaci: $\log_a a^k = k$

$$\log_5 \frac{\sqrt{5}}{25} = \log_5 \sqrt{5} - \log_5 25 = \log_5 5^{\frac{1}{2}} - \log_5 5^2 = \frac{1}{2} - 2 = -1\frac{1}{2}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz:

$$\log \frac{10\sqrt{10}}{1000}$$

Rozwiązanie:

Wykorzystujemy $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ i $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$, a następnie za pomocą **wzorów**, doprowadzamy logarytm do postaci: $\log_a a^k = k$

$$\begin{aligned} \log \frac{10\sqrt{10}}{1000} &= \log 10\sqrt{10} - \log 1000 = \log 10 + \log \sqrt{10} - \log 10^3 = \\ &= 1 + \log 10^{\frac{1}{2}} - 3 = 1 + \frac{1}{2} - 3 = 1\frac{1}{2} - 3 = -1\frac{1}{2} \end{aligned}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz:

$$\log_4 8$$

Rozwiązanie:

Wykorzystujemy $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, a następnie za pomocą wzorów,

doprowadzamy logarytm do postaci: $\log_a a^k = k$

$$\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{\log_2 2^3}{\log_2 2^2} = \frac{3}{2}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz:

$$\log_{25} 5$$

Rozwiązanie:

Wykorzystujemy $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, a następnie za pomocą wzorów,

doprowadzamy logarytm do postaci: $\log_a a^k = k$

$$\log_{25} 5 = \frac{\log_5 5}{\log_5 25} = \frac{1}{\log_5 5^2} = \frac{1}{2}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz:

$$\log_{\sqrt{10}} 100$$

Rozwiązanie:

Wykorzystujemy $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, a następnie za pomocą wzorów,

doprowadzamy logarytm do postaci: $\log_a a^k = k$

$$\log_{\sqrt{10}} 100 = \frac{\log 100}{\log \sqrt{10}} = \frac{\log 10^2}{\log 10^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 : \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{2}{1} = 4$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz:

$$\log_{2\sqrt{2}} 4$$

Rozwiązanie:

Wykorzystujemy $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$, a następnie za pomocą wzorów, doprowadzamy logarytm do postaci: $\log_a a^k = k$

$$\begin{aligned}\log_{2\sqrt{2}} 4 &= \frac{\log_2 4}{\log_2 2\sqrt{2}} = \frac{\log_2 2^2}{\log_2 2 + \log_2 \sqrt{2}} = \frac{\log_2 2^2}{\log_2 2 + \log_2 2^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{1 + \frac{1}{2}} = \\ &= 2 : 1\frac{1}{2} = 2 : \frac{3}{2} = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}\end{aligned}$$

Wzory, definicje, twierdzenia (Logarytmy)

- Logarytm
- Wzory
- Wykres funkcji logarytmicznej

- 
- spis treści
 - symbole
 - zgłoś błąd
 - 13 kwiecień





Rozwiąż równanie:

$$\triangleright \log_2 x = 3 \quad \triangleright \log_{0,5} x = 4$$

Rozwiąż równanie:

$$\triangleright 2 + \log_3(2x + 1) = \log_3(5x + 22)$$

$$\triangleright \log_5(x - 1) - \log_5(4x + 1) = \log_5 \frac{x-5}{5}$$

$$\triangleright \log_2(x + 1) + \log_2(x + 3) = 3$$

spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Rozwiąż równanie:

$$\log_2 x = 3$$

Rozwiązanie:

Korzystamy z **definicji** logarytmu:

$$\log_2 x = 3$$

$$x = 2^3$$

$$x = 8$$

matma235@o2.pl

Rozwiąż równanie:

$$\log_{0,5} x = 4$$

Rozwiązanie:

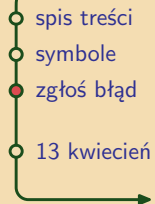
Korzystamy z **definicji** logarytmu:

$$\log_{0,5} x = 4$$

$$x = 0,5^4$$

$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$x = \frac{1}{16}$$

- 
- spis treści
 - symbole
 - zgłoś błąd
 - 13 kwiecień





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Rozwiąż równanie:

$$2 + \log_3(2x + 1) = \log_3(5x + 22)$$

Rozwiązanie:

Zaczynamy od wyznaczenia **dziedziny**. Logarytmować możemy tylko liczby dodatnie, dlatego:

$$2x + 1 > 0$$

$$\text{ i } 5x + 22 > 0$$

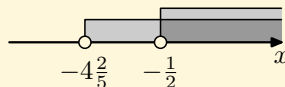
$$2x > -1 \quad / : 2$$

$$5x > -22 \quad / : 5$$

$$x > -\frac{1}{2}$$

$$x > -\frac{22}{5}$$

$$x > -4\frac{2}{5}$$



$$D = \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$$

$$2 + \log_3(2x + 1) = \log_3(5x + 22)$$

$$x = 1$$

Rozwiązanie należy do dziedziny.

Odp. $x = 1$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$2 + \log_3(2x + 1) = \log_3(5x + 22)$$

Korzystamy z $\log_a a^k = k$

$$\log_3 3^2 + \log_3(2x + 1) = \log_3(5x + 22)$$

$$\log_3 9 + \log_3(2x + 1) = \log_3(5x + 22)$$

Korzystamy z $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$:

$$\log_3 9(2x + 1) = \log_3(5x + 22)$$

Funkcja logarytmiczna jest **różnowartościowa**, więc możemy opuścić logarytmy:

$$9(2x + 1) = 5x + 22$$

$$18x + 9 = 5x + 22$$

$$18x - 5x = 22 - 9$$

$$13x = 13 \quad / : 13$$

$$x = 1$$



matma235@o2.pl

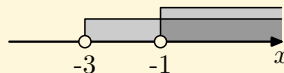
Rozwiąż równanie:

$$\log_2(x+1) + \log_2(x+3) = 3$$

Rozwiązanie:

Zaczynamy od wyznaczenia **dziedziny**. Logarytmować możemy tylko liczby dodatnie, dlatego:

$$\begin{array}{ll} x+1 > 0 & \text{i} \quad x+3 > 0 \\ x > -1 & \quad \quad x > -3 \end{array}$$



$$D = (-1, \infty)$$

$$\log_2(x+1) + \log_2(x+3) = 3$$

$$x_1 = -5 \quad x_2 = 1$$

Tylko $x_1 = 1$ należy do dziedziny.

Odp. $x = 1$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

$$\log_2(x+1) + \log_2(x+3) = 3$$

Korzystamy z $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$:

$$\log_2(x+1)(x+3) = 3$$

Korzystamy z definicji logarytmu:

$$(x+1)(x+3) = 2^3$$

$$(x+1)(x+3) = 8$$

$$x^2 + 3x + x + 3 = 8$$

$$x^2 + 3x + x + 3 - 8 = 0$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 16 + 20 = 36$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{36} = 6$$

$$x_1 = \frac{-4 - 6}{2 \cdot 1} = \frac{-10}{2} = -5$$

$$x_2 = \frac{-4 + 6}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_1 = -5 \quad x_2 = 1$$

spis treści
symbole
zgłoś błąd
13 kwiecień



matma235@o2.pl

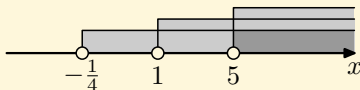
Rozwiąż równanie:

$$\log_5(x-1) - \log_5(4x+1) = \log_5 \frac{x-5}{5}$$

Rozwiązanie:

Zaczynamy od wyznaczenia **dziedziny**. Logarytmować możemy tylko liczby dodatnie, dlatego:

$$\begin{array}{lll} x-1 > 0 & \text{ i } & 4x+1 > 0 & \text{ i } & \frac{x-5}{5} > 0 \quad / \cdot 5 \\ x > 1 & & 4x > -1 \quad / : 4 & & x-5 > 0 \\ & & x > -\frac{1}{4} & & x > 5 \end{array}$$



$$D = (5, \infty)$$

$$\log_5(x-1) - \log_5(4x+1) = \log_5 \frac{x-5}{5}$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 6$$

Tylko $x_2 = 6$ należy do dziedziny.

Odp. $x = 6$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$\log_5(x-1) - \log_5(4x+1) = \log_5 \frac{x-5}{5}$$

$$\log_5(x-1) = \log_5 \frac{x-5}{5} + \log_5(4x+1)$$

Korzystamy z $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$:

$$\log_5(x-1) = \log_5 \frac{x-5}{5} \cdot (4x+1)$$

Funkcja logarytmiczna jest **różnowartościowa**, więc możemy opuścić logarytmy:

$$x-1 = \frac{x-5}{5} \cdot (4x+1) / \cdot 5$$

$$5(x-1) = (x-5)(4x+1)$$

$$5x-5 = 4x^2 + x - 20x - 5$$

$$5x-5 = 4x^2 - 19x - 5$$

$$5x-5-4x^2+19x+5=0$$

$$-4x^2+24x=0$$

$$-4(x^2-6x)=0$$

$$-4x(x-6)=0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 6$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Rozwiąż nierówności:

$$\triangleright \log_3(x - 3) > 2$$

$$\triangleright \log_3(2x - 7) \leq 2 - \log_3(8 - x)$$

$$\triangleright \log_{0,5}(3x - 2) \geq -1$$

$$\triangleright \log_{\frac{1}{3}}(4x + 1) > -2 - \log_{\frac{1}{3}}(2x - 3)$$



matma235@o2.pl

Rozwiąż nierówność:

$$\log_3(x-3) > 2$$

Rozwiązanie:

Zaczynamy od wyznaczenia **dziedziny**. Logarytmować możemy tylko liczby dodatnie, dlatego:

$$x - 3 > 0$$

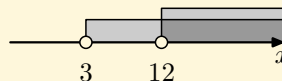
$$x > 3$$

$$D = (3, \infty)$$

$$\log_3(x-3) > 2$$

$$x \in (12, \infty)$$

Zaznaczamy na jednym rysunku dziedzinę i rozwiązanie nierówności:



Rozwiązanie to **część wspólna**:

$$x \in (12, \infty)$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$\log_3(x - 3) > 2$$

Korzystamy z $\log_a a^k = k$

$$\log_3(x - 3) > \log_3 3^2$$

Podstawy logarytmów są jednakowe i większe od 1. Funkcja logarytmiczna jest więc rosnąca, dlatego **nie odwracamy** znaku nierówności.

$$x - 3 > 3^2$$

$$x - 3 > 9$$

$$x > 9 + 3$$

$$x > 12$$

$$x \in (12, \infty)$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Rozwiąż nierówność:

$$\log_{0,5}(3x - 2) \geq -1$$

Rozwiązanie:

Zaczynamy od wyznaczenia **dziedziny**. Logarytmować możemy tylko liczby dodatnie, dlatego:

$$3x - 2 > 0$$

$$3x > 2 \quad / : 3$$

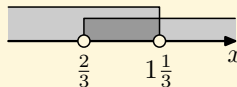
$$x > \frac{2}{3}$$

$$D = \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$$

$$\log_{0,5}(3x - 2) \geq -1$$

$$x \in \left(-\infty, 1\frac{1}{3}\right)$$

Zaznaczamy na jednym rysunku dziedzinę i rozwiązanie nierówności:



Rozwiązanie to **część wspólna**:

$$x \in \left(\frac{2}{3}, 1\frac{1}{3}\right)$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$\log_{0,5}(3x - 2) \geq -1$$

Korzystamy z $\log_a a^k = k$

$$\log_{0,5}(3x - 2) \geq \log_{0,5} 0,5^{-1}$$

Podstawy logarytmów są jednakowe i mniejsze od 1. Funkcja logarytmiczna jest więc malejąca, dlatego **odwracamy** znak nierówności.

$$3x - 2 \leq 0,5^{-1}$$

$$3x - 2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

$$3x - 2 \leq 2 \quad \triangleright$$

$$3x \leq 2 + 2$$

$$3x \leq 4 \quad / : 3$$

$$x \leq \frac{4}{3}$$

$$x \leq 1\frac{1}{3}$$

$$x \in \left(-\infty, 1\frac{1}{3}\right]$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Rozwiąż nierówność:

$$\log_3(2x - 7) \leq 2 - \log_3(8 - x)$$

Rozwiązanie:

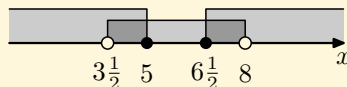
Zaczynamy od wyznaczenia dziedziny.

$$D = (3\frac{1}{2}, 8)$$

$$\log_3(2x - 7) \leq 2 - \log_3(8 - x)$$

$$x \in (-\infty, 5) \cup (6\frac{1}{2}, \infty)$$

Zaznaczamy na jednym rysunku dziedzinę i rozwiązanie nierówności:



Rozwiązanie to **część wspólna**:

$$x \in \left(3\frac{1}{2}, 5\right) \cup \left(6\frac{1}{2}, 8\right)$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

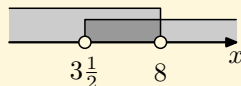


matma235@o2.pl

$$\log_3(2x - 7) \leq 2 - \log_3(8 - x)$$

Wyznaczamy dziedzinę. Logarytmować możemy tylko liczby dodatnie, dlatego:

$$\begin{aligned} 2x - 7 > 0 & \quad \text{i} \quad 8 - x > 0 \\ 2x > 7 / : 2 & \quad -x > -8 / : (-1) \\ x > -\frac{7}{2} & \quad x < 8 \\ x > -3\frac{1}{2} & \end{aligned}$$



$$D = (3\frac{1}{2}, 8)$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

$$\log_3(2x - 7) \leq 2 - \log_3(8 - x)$$

$$\log_3(2x - 7) + \log_3(8 - x) \leq 2$$

Korzystamy z $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$:

$$\log_3(2x - 7)(8 - x) \leq 2$$

Korzystamy z $\log_a a^k = k$

$$\log_3(2x - 7)(8 - x) \leq \log_3 3^2$$

Podstawy logarytmów są jednakowe i większe od 1. Funkcja logarytmiczna jest więc rosnąca, dlatego nie odwracamy znaku nierówności.

$$(2x - 7)(8 - x) \leq 3^2$$

$$(2x - 7)(8 - x) \leq 9$$

$$16x - 2x^2 - 56 + 7x \leq 9$$

$$16x - 2x^2 - 56 + 7x - 9 \leq 0$$

$$-2x^2 + 23x - 65 \leq 0$$

$$x \in (-\infty, 5) \cup \langle 6\frac{1}{2}, \infty)$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

$$-2x^2 + 23x - 65 \leq 0$$

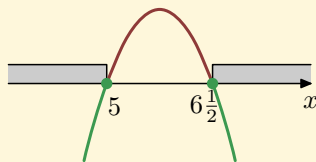
Rozwiązujemy nierówność kwadratową:

$$\Delta = 23^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-65) = 529 - 520 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$$

$$x_1 = \frac{-23 - 3}{2 \cdot (-2)} = \frac{-26}{-4} = 6\frac{2}{4} = 6\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-23 + 3}{2 \cdot (-2)} = \frac{-20}{-4} = 5$$



$$x \in (-\infty, 5) \cup \left(6\frac{1}{2}, \infty\right)$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Rozwiąż nierówność:

$$\log_{\frac{1}{3}}(4x+1) > -2 - \log_{\frac{1}{3}}(2x-3)$$

Rozwiązanie:

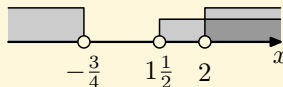
Zaczynamy od wyznaczenia dziedziny.

$$D = (1\frac{1}{2}, \infty)$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(4x+1) \leq -2 - \log_{\frac{1}{3}}(2x-3)$$

$$x \in (-\infty, -\frac{3}{4}) \cup (2, \infty)$$

Zaznaczamy na jednym rysunku dziedzinę i rozwiązanie nierówności:



Rozwiązanie to część wspólna:

$$x \in (2, \infty)$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$\log_{\frac{1}{3}}(4x + 1) > -2 - \log_{\frac{1}{3}}(2x - 3)$$

Wyznaczamy dziedzinę. Logarytmować możemy tylko liczby dodatnie, dlatego:

$$4x + 1 > 0$$

$$i \quad 2x - 3 > 0$$

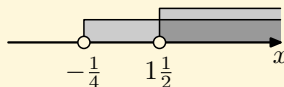
$$4x > -1 \quad / : 4$$

$$2x > 3 \quad / : 2$$

$$x > -\frac{1}{4}$$

$$x > \frac{3}{2}$$

$$x > 1\frac{1}{2}$$



$$D = (1\frac{1}{2}, \infty)$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

$$\log_{\frac{1}{3}}(4x+1) > -2 - \log_{\frac{1}{3}}(2x-3)$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(4x+1) + \log_{\frac{1}{3}}(2x-3) > -2$$

Korzystamy z $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$:

$$\log_{\frac{1}{3}}(4x+1)(2x-3) > -2$$

Korzystamy z $\log_a a^k = k$

$$\log_{\frac{1}{3}}(4x+1)(2x-3) > \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$$

Podstawy logarytmów są jednakowe i mniejsze od 1. Funkcja logarytmiczna jest więc malejąca, dlatego **odwracamy** znaku nierówności.

$$(4x+1)(2x-3) < \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$$

$$8x^2 - 12x + 2x - 3 < 3^2 \quad \triangleright$$

$$8x^2 - 10x - 3 < 9$$

$$8x^2 - 10x - 3 - 9 < 0$$

$$8x^2 - 10x - 12 < 0$$

$$x \in \left(-\frac{3}{4}, 2\right)$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

$$8x^2 - 10x - 12 < 0$$

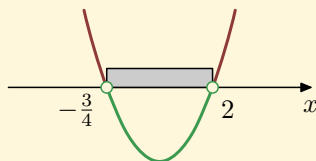
Rozwiązujemy nierówność kwadratową:

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-12) = 100 + 384 = 484$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{484} = 22$$

$$x_1 = \frac{-(-10) - 22}{2 \cdot 8} = \frac{10 - 22}{16} = -\frac{12}{16} = -\frac{3}{4}$$

$$x_2 = \frac{-(-10) + 22}{2 \cdot 8} = \frac{10 + 22}{16} = \frac{32}{16} = 2$$



$$x \in \left(-\frac{3}{4}, 2\right)$$

Wzory, definicje, twierdzenia (Ciągi i ich granice)

- Monotoniczność ciągu
- Ciąg arytmetyczny
- Ciąg geometryczny
- Kapitalizacja odsetek
- Nieskończony ciąg geometryczny
- Proste granice
- Odgadywanie prostych granic

spis treści
symbole
zgłoś błąd
13 kwiecień



Monotoniczność ciągu

Definicja ciągu rosnącego

Dla każdego n naturalnego: $a_{n+1} - a_n > 0$

Przykłady:

$$3, 6, 9, 12, \dots \quad a_n = 3n$$

$$1, 4, 9, 16, \dots \quad a_n = n^2$$

$$1, 3, 5, 7, \dots \quad a_n = 2n - 1$$

Definicja ciągu malejącego

Dla każdego n naturalnego: $a_{n+1} - a_n < 0$

Przykłady:

$$-3, -6, -9, -12, \dots \quad a_n = -3n$$

$$-1, -4, -9, -16, \dots \quad a_n = -n^2$$

$$-1, -3, -5, -7, \dots \quad a_n = -2n + 1$$

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień



Ciąg arytmetyczny

a_1 – pierwszy wyraz ciągu

r – różnica ciągu arytmetycznego

Definicja:

Kolejny wyraz ciągu arytmetycznego powstaje przez dodanie do poprzedniego różnicy r .

$$a_{n+1} = a_n + r$$

Przykłady:

$$a_1 = 2 \quad r = 3 \quad 2, 5, 8, 11, 14, 17, \dots$$

$$a_1 = -4 \quad r = 2 \quad -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots$$

$$a_1 = 5 \quad r = -4 \quad 5, 1, -3, -7, -11, -15, \dots$$

n -ty wyraz ciągu arytmetycznego

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

suma n -początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

własność ciągu arytmetycznego

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień



wzory, twierdzenia, definicje

- monotoniczność ciągu
- ciąg arytmetyczny
- ciąg geometryczny
- kapitalizacja odsetek
- nieskończony ciąg geometryczny
- proste granice ciągu

przykłady

- 
- o spisy treści
 - o symbole
 - o zgłosz błęd
 - o 13 kwiecień





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Dla poniższych ciągów arytmetycznych podaj pierwszy wyraz a_1 i różnicę r . Oblicz wartość a_{30} i a_{40} .

$$\triangleright 2, 5, 8, 11, 14, \dots \quad \triangleright 10, 7, 4, 1, -2, \dots$$

Dla poniższych ciągów arytmetycznych oblicz sumę pierwszych dwudziestu wyrazów.

$$\triangleright 3, 5, 7, 9, 11, \dots \quad \triangleright -4, -1, 2, 5, 8, \dots$$

Zbadaj, czy ciąg jest arytmetyczny.

$$\triangleright a_n = 3n + 2 \quad \triangleright a_n = n^2$$

Zbadaj monotoniczność ciągów arytmetycznych.

$$\triangleright a_n = 5n - 2 \quad \triangleright a_n = 3 - 2n$$

Wyznacz ciąg arytmetyczny mając dane.

$$\triangleright a_2 = 5 \quad a_3 = 7 \quad \triangleright a_5 = 18 \quad a_6 = 21$$

Wyznacz ciąg arytmetyczny mając dane.

$$\triangleright a_5 = 12 \quad a_8 = 18 \quad \triangleright a_{11} = 30 \quad a_{15} = 42$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Dla poniższych ciągów arytmetycznych podaj pierwszy wyraz a_1 i różnicę r . Oblicz wartość a_{30} i a_{40} .

2, 5, 8, 11, 14, ...

Rozwiązanie:

$$a_1 = 2$$

Korzystamy z definicji

$$a_2 = a_1 + r$$

$$5 = 2 + r$$

$$5 - 2 = r$$

$$r = 3$$

Korzystamy z $a_n = a_1 + (n - 1)r$

$$a_{30} = 2 + (30 - 1) \cdot 3 = 2 + 29 \cdot 3 = 89$$

$$a_{40} = 2 + (40 - 1) \cdot 3 = 2 + 39 \cdot 3 = 119$$



matma235@o2.pl

Dla poniższych ciągów arytmetycznych podaj pierwszy wyraz a_1 i różnicę r . Oblicz wartość a_{30} i a_{40} .

$$10, 7, 4, 1, -2, \dots$$

Rozwiązanie:

$$a_1 = 10$$

Korzystamy z definicji

$$a_2 = a_1 + r$$

$$7 = 10 + r$$

$$7 - 10 = r$$

$$r = -3$$

Korzystamy z $a_n = a_1 + (n - 1)r$

$$a_{30} = 10 + (30 - 1) \cdot (-3) = 10 + 29 \cdot (-3) = 10 - 87 = -77$$

$$a_{40} = 10 + (40 - 1) \cdot (-3) = 10 + 39 \cdot (-3) = 10 - 117 = -107$$



matma235@o2.pl

Dla poniższych ciągów arytmetycznych oblicz sumę pierwszych dwudziestu wyrazów.

$$3, 5, 7, 9, 11, \dots$$

Rozwiązanie:

$$\text{Korzystamy z } S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20$$

$$a_1 = 3$$

$$a_{20} \text{ liczymy korzystając z } a_n = a_1 + (n - 1)r.$$

Najpierw trzeba jednak policzyć r .

$$a_2 = a_1 + r$$

$$5 = 3 + r$$

$$5 - 3 = r$$

$$r = 2$$

$$a_{20} = 3 + (20 - 1) \cdot 2 = 2 + 19 \cdot 2 = 41$$

$$S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = \frac{3 + 41}{2} \cdot 20 = \frac{44}{2} \cdot 20 = 22 \cdot 20 = 440$$



matma235@o2.pl

Dla poniższych ciągów arytmetycznych oblicz sumę pierwszych dwudziestu wyrazów.

$$-4, -1, 2, 5, 8, \dots$$

Rozwiązanie:

$$\text{Korzystamy z } S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20$$

$$a_1 = -4$$

$$a_{20} \text{ liczymy korzystając z } a_n = a_1 + (n - 1)r.$$

Najpierw trzeba jednak policzyć r .

$$a_2 = a_1 + r$$

$$-1 = -4 + r$$

$$-1 + 4 = r$$

$$r = 3$$

$$a_{20} = -4 + (20 - 1) \cdot 3 = -4 + 19 \cdot 3 = 53$$

$$S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = \frac{-4 + 53}{2} \cdot 20 = \frac{49}{2} \cdot 20 = 49 \cdot 10 = 490$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Zbadaj, czy ciąg jest arytmetyczny.

$$a_n = 3n + 2$$

Rozwiązanie:

Korzystamy z definicji

$$a_{n+1} = a_n + r$$

$$r = a_{n+1} - a_n$$

Ciąg jest **ciągami arytmetycznym**, jeżeli $a_{n+1} - a_n$ jest stałe (niezależne od n).

$$a_n = 3n + 2$$

$$a_{n+1} = 3(n + 1) + 2 = 3n + 3 + 2 = 3n + 5$$

$$a_{n+1} - a_n = 3n + 5 - (3n + 2) = 3n + 5 - 3n - 2 = 5 - 2 = 3$$

Odp. Ciąg $a_n = 3n + 2$ jest arytmetyczny.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Zbadaj, czy ciąg jest arytmetyczny.

$$a_n = n^2$$

Rozwiązanie:

Korzystamy z definicji

$$a_{n+1} = a_n + r$$

$$r = a_{n+1} - a_n$$

Ciąg jest **ciągą arytmetyczną**, jeżeli $a_{n+1} - a_n$ jest stałe (niezależne od n).

$$a_n = n^2$$

$$a_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \quad \triangleright$$

$$a_{n+1} - a_n = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1 \quad (\text{zależne od } n)$$

Odp. Ciąg $a_n = n^2$ nie jest arytmetyczny.

Zbadaj monotoniczność ciągu arytmetycznego.

$$a_n = 5n - 2$$

Rozwiązanie:

Korzystamy z definicji

$$a_n = 5n - 2$$

$$a_{n+1} = 5(n+1) - 2 = 5n + 5 - 2 = 5n + 3$$

$$a_{n+1} - a_n = 5n + 3 - (5n - 2) = 5n + 3 - 5n + 2 = 3 + 2 = 5 > 0$$

Odp. Ciąg $a_n = 5n - 2$ jest rosnący.





Zbadaj monotoniczność ciągu arytmetycznego.

$$a_n = 3 - 2n$$

Rozwiązanie:

Korzystamy z definicji

$$a_n = 3 - 2n$$

$$a_{n+1} = 3 - 2(n + 1) = 3 - 2n - 2 = 1 - 2n$$

$$a_{n+1} - a_n = 1 - 2n - (3 - 2n) = 1 - 2n - 3 + 2n = 1 - 3 = -2 < 0$$

Odp. Ciąg $a_n = 3 - 2n$ jest malejący.



Wyznacz ciąg arytmetyczny mając dane.

$$a_2 = 5 \quad a_3 = 7$$

Rozwiązanie:

Wyznaczyć ciąg arytmetyczny oznacza, że należy podać jego pierwszy wyraz a_1 i różnicę r .
Korzystamy z **definicji**

$$a_3 = a_2 + r$$

$$7 = 5 + r$$

$$7 - 5 = r$$

$$r = 2$$

$$a_2 = a_1 + r$$

$$5 = a_1 + 2$$

$$5 - 2 = a_1$$

$$a_1 = 3$$

Odp. $a_1 = 3$ $r = 2$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Wyznacz ciąg arytmetyczny mając dane.

$$a_5 = 18 \quad a_6 = 21$$

Rozwiązanie:

Wyznaczyć ciąg arytmetyczny oznaczając, że należy podać jego pierwszy wyraz a_1 i różnicę r .

Korzystamy z **definicji**

$$a_6 = a_5 + r$$

$$21 = 18 + r$$

$$21 - 18 = r$$

$$r = 3$$

a_1 policzymy z $a_n = a_1 + (n - 1)r$

$$a_5 = a_1 + (5 - 1)r$$

$$18 = a_1 + 4 \cdot 3$$

$$18 = a_1 + 12$$

$$18 - 12 = a_1$$

$$a_1 = 6$$

Odp. $a_1 = 6$ $r = 3$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Wyznacz ciąg arytmetyczny mając dane.

$$a_5 = 12 \quad a_8 = 18$$

Rozwiązanie:

Wyznaczyć ciąg arytmetyczny oznacza, że należy podać jego pierwszy wyraz a_1 i różnicę r .

$$\begin{cases} a_5 = 12 \\ a_8 = 18 \end{cases}$$

Korzystamy z $a_n = a_1 + (n - 1)r$

$$\begin{cases} a_5 = 12 \\ a_8 = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 12 - 4r \\ 3r = 18 - 12 : 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + (5 - 1)r = 12 \\ a_1 + (8 - 1)r = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 12 - 4 \cdot 2 \\ r = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + 4r = 12 \\ a_1 + 7r = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ r = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 12 - 4r \\ 12 - 4r + 7r = 18 \end{cases}$$

Odp. $a_1 = 4 \quad r = 2$

Wyznacz ciąg arytmetyczny mając dane.

$$a_{11} = 30 \quad a_{15} = 42$$

Rozwiązanie:

Wyznaczyć ciąg arytmetyczny oznacza, że należy podać jego pierwszy wyraz a_1 i różnicę r .

$$\begin{cases} a_{11} = 30 \\ a_{15} = 42 \end{cases}$$

Korzystamy z $a_n = a_1 + (n - 1)r$

$$\begin{cases} a_{11} = 30 \\ a_{15} = 42 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 30 - 10r \\ 4r = 42 - 30 : 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + (11 - 1)r = 30 \\ a_1 + (15 - 1)r = 42 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 30 - 10 \cdot 3 \\ r = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + 10r = 30 \\ a_1 + 14r = 42 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ r = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 30 - 10r \\ 30 - 10r + 14r = 42 \end{cases}$$

Odp. $a_1 = 0 \quad r = 3$



Ciąg geometryczny

a_1 – pierwszy wyraz ciągu

q – iloraz ciągu geometrycznego

Definicja:

Kolejny wyraz ciągu geometrycznego powstaje po pomnożeniu poprzedniego wyrazu przez iloraz q .

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

Przykłady:

$$a_1 = 3 \quad q = 2 \quad 3, 6, 12, 24, 48, \dots$$

$$a_1 = -2 \quad q = -4 \quad -2, 8, -32, 128, -512, \dots$$

$$a_1 = 9 \quad q = \frac{1}{3} \quad 9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$$

$$a_1 = 2 \quad q = 1 \quad 2, 2, 2, 2, 2, \dots$$

n -ty wyraz ciągu geometrycznego

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

suma n -początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$\text{dla } q = 1 \quad S_n = n \cdot a_1$$

własność ciągu geometrycznego

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Dla poniższych ciągów geometrycznych podaj pierwszy wyraz a_1 i iloraz q .
Oblicz wartość a_9 i a_{12} .

▷ 3, 6, 12, ... ▷ 8, 4, 2, ...

Dla poniższych ciągów geometrycznych oblicz sumę pierwszych dziesięciu wyrazów.

▷ 2, 6, 18, ... ▷ 16, 8, 4, ...

Zbadaj, czy ciąg jest geometryczny.

▷ $a_n = 3^n$ ▷ $a_n = 2n$

Wyznacz ciąg geometryczny mając dane.

▷ $a_2 = 10$ $a_3 = 20$ ▷ $a_4 = 16$ $a_5 = 2$

Wyznacz ciąg geometryczny mając dane.

▷ $a_3 = 9$ $a_5 = 81$ ▷ $a_4 = 1$ $a_7 = 8$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Dla poniższego ciągu geometrycznego podaj pierwszy wyraz a_1 i iloraz q .
Oblicz wartość a_9 i a_{12} .

$$3, 6, 12, \dots$$

Rozwiązanie:

$$a_1 = 3$$

Korzystamy z definicji

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$6 = 3 \cdot q \quad / : 3$$

$$q = 2$$

Korzystamy z $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$$a_9 = 3 \cdot 2^{9-1} = 3 \cdot 2^8 = 3 \cdot 256 = 768$$

$$a_{12} = 3 \cdot 2^{12-1} = 3 \cdot 2^{11} = 3 \cdot 2048 = 6144$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Dla poniższego ciągu geometrycznego podaj pierwszy wyraz a_1 i iloraz q .
Oblicz wartość a_9 i a_{12} .

8, 4, 2, ...

Rozwiązanie:

$$a_1 = 8$$

Korzystamy z definicji

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$4 = 8 \cdot q / : 8$$

$$q = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Korzystamy z $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$$a_9 = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{9-1} = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = 8 \cdot \frac{1}{256} = \frac{8}{256} = \frac{1}{32}$$

$$a_{12} = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12-1} = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{11} = 8 \cdot \frac{1}{2048} = \frac{8}{2048} = \frac{1}{256}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Dla poniższego ciągu geometrycznego oblicz sumę pierwszych dziesięciu wyrazów.

2, 6, 18, ...

Rozwiązanie:

Korzystamy z $S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$

$$a_1 = 2$$

Korzystamy z definicji

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$6 = 2 \cdot q \quad / : 2$$

$$q = 3$$

$$S_{10} = 2 \cdot \frac{1 - 3^{10}}{1 - 3} = 2 \cdot \frac{1 - 59049}{-2} = 2 \cdot \frac{-59048}{-2} = 59048$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Dla poniższego ciągu geometrycznego oblicz sumę pierwszych dziesięciu wyrazów.

16, 8, 4, ...

Rozwiązanie:

Korzystamy z $S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$

$a_1 = 16$

Korzystamy z definicji

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$8 = 16 \cdot q \quad / : 16$$

$$q = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} S_{10} &= 16 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} = 16 \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{10}}}{\frac{1}{2}} = 16 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{10}}\right) : \frac{1}{2} = 16 \cdot \left(1 - \frac{1}{1024}\right) \cdot 2 = \\ &= 32 \cdot \left(\frac{1024}{1024} - \frac{1}{1024}\right) = 32 \cdot \frac{1023}{1024} = \frac{32 \cdot 1023}{1024} = \frac{1023}{32} = 31 \frac{31}{32} \end{aligned}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zbadaj, czy ciąg jest geometryczny.

$$a_n = 3^n$$

Korzystamy z definicji

$$a_{n+1} = a_n \cdot q / : a_n$$

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Ciąg jest ciągiem geometrycznym, jeżeli $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest stałe (niezależne od n)

$$a_n = 3^n$$

$$a_{n+1} = 3^{n+1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} = \frac{3^n \cdot 3}{3^n} = 3$$

Odp. Ciąg $a_n = 3^n$ jest geometryczny.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zbadaj, czy ciąg jest geometryczny.

$$a_n = 2n$$

Korzystamy z definicji

$$a_{n+1} = a_n \cdot q \quad / : a_n$$

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Ciąg jest ciągiem geometrycznym, jeżeli $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest stałe (niezależne od n)

$$a_n = 2n$$

$$a_{n+1} = 2(n+1)$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{n} = \frac{n}{n} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \quad (\text{zależne od } n)$$

Odp. Ciąg $a_n = 2n$ nie jest geometryczny.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Wyznacz ciąg geometryczny mając dane.

$$a_2 = 10 \quad a_3 = 20$$

Rozwiązanie:

Wyznaczyć ciąg geometryczny oznacza, że należy podać jego pierwszy wyraz a_1 i iloraz q .

Korzystamy z **definicji**

$$a_3 = a_2 \cdot q$$

$$20 = 10 \cdot q / : 10$$

$$q = 2$$

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$10 = a_1 \cdot 2 / : 2$$

$$a_1 = 5$$

Odp. $a_1 = 5$ $q = 2$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Wyznacz ciąg geometryczny mając dane.

$$a_4 = 16 \quad a_5 = 2$$

Rozwiązanie:

Wyznaczyć ciąg geometryczny oznacza, że należy podać jego pierwszy wyraz a_1 i iloraz q .
Korzystamy z **definicji**

$$a_5 = a_4 \cdot q$$

$$2 = 16 \cdot q \quad / : 16$$

$$q = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

a_1 policzymy z $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$$a_4 = a_1 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{4-1}$$

$$16 = a_1 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^3$$

$$16 = a_1 \cdot \frac{1}{512} \quad / \cdot 512$$

$$a_1 = 8192$$

Odp. $a_1 = 8192 \quad q = \frac{1}{8}$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Wyznacz ciąg geometryczny mając dane.

$$a_3 = 9 \quad a_5 = 81$$

Rozwiązanie:

$$\begin{cases} a_3 = 9 \\ a_5 = 81 \end{cases}$$

Korzystamy z $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$$\begin{cases} a_1 \cdot q^{3-1} = 9 \\ a_1 \cdot q^{5-1} = 81 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 \cdot q^2 = 9 / : q^2 \\ a_1 \cdot q^4 = 81 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = \frac{9}{q^2} \\ \frac{9}{q^2} \cdot q^4 = 81 \quad \triangleright \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = \frac{9}{q^2} \\ 9 \cdot q^2 = 81 / : 9 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = \frac{9}{q^2} \\ q^2 = 9 \end{cases}$$

dalej



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

Równanie $q^2 = 9$ ma dwa rozwiązania $q = -3$ lub $q = 3$.

$$\begin{cases} a_1 = \frac{9}{q^2} \\ q = -3 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} a_1 = \frac{9}{q^2} \\ q = 3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_1 = \frac{9}{(-3)^2} \\ q = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = \frac{9}{3^2} \\ q = 3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ q = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = 1 \\ q = 3 \end{cases}$$

Odp. Rozwiązaniem są dwa ciągi geometryczne:

$$a_1 = 1, q = -3 \quad \text{lub} \quad a_1 = 1, q = 3.$$





matma235@o2.pl

Wyznacz ciąg geometryczny mając dane.

$$a_4 = 1 \quad a_7 = 8$$

Rozwiązanie:

$$\begin{cases} a_4 = 1 \\ a_7 = 8 \end{cases}$$

Korzystamy z $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$$\begin{cases} a_1 \cdot q^{4-1} = 1 \\ a_1 \cdot q^{7-1} = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 \cdot q^3 = 1 / : q^3 \\ a_1 \cdot q^6 = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = \frac{1}{q^3} \\ \frac{1}{q^3} \cdot q^6 = 8 \triangleright \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = \frac{1}{q^3} \\ q^3 = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \\ q = 2 \end{cases}$$

Odp. Rozwiązaniem jest ciąg geometryczny: $a_1 = \frac{1}{8}$, $q = 2$

Kapitalizacja odsetek

Przykład:

Na koncie jest 200 zł. Co roku bank dopisuje 5%.

czas	konto	odsetki
początek	200	
po roku	210	10
po 2 latach	220,5	10,5
po 3 latach	231,53	11,03
po 4 latach	243,11	11,58
.	.	.
.	.	.
.	.	.

Jak widać odsetki dopisywane co roku przez bank, zwiększają się. Nazywamy to **kapitalizacją odsetek**.

Do policzenia, ile będziemy mieć na koncie np. po 20 latach, możemy wykorzystać wzór:

$$K = K_0 \cdot (1 + p)^n$$

K_0 – kapitał początkowy

p – procent dopisywany

n – ile razy dopisano odsetki

- 
- spis treści
 - symbole
 - zgłoś błąd
 - 13 kwiecień





▷ Wpłacasz 6000 zł na konto oprocentowane na 5% w skali roku. Ile będzie pieniędzy na koncie po 7 latach, jeżeli odsetki dopisywane są raz w roku?

▷ Wpłacasz 8000 zł na konto oprocentowane na 4% w skali roku. Ile będzie pieniędzy na koncie po 5 latach, jeżeli odsetki dopisywane są co pół roku?

▷ Wpłacasz 4000 zł na konto oprocentowane na 8% w skali roku. Ile będzie pieniędzy na koncie po 9 latach, jeżeli odsetki dopisywane są co kwartał?

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Wpłacasz 6000 zł na konto oprocentowane na 5% w skali roku. Ile będzie pieniędzy na koncie po 7 latach, jeżeli odsetki dopisywane są raz w roku?

Rozwiązanie:

Korzystamy z $K = K_0 \cdot (1 + p)^n$

$$K_0 = 6000$$

$$p = 5\% = \frac{5}{100} = 0,05$$

$$n = 7$$

$$K = 6000 \cdot (1 + 0,05)^7 = 6000 \cdot (1,05)^7 \approx 6000 \cdot 1,4071 = 8442,6$$

Odp. Po 7 latach na koncie będzie 8442,6 zł.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Wpłacasz 8000 zł na konto oprocentowane na 4% w skali roku. Ile będzie pieniędzy na koncie po 5 latach, jeżeli odsetki dopisywane są co pół roku?

Rozwiązanie:

Korzystamy z $K = K_0 \cdot (1 + p)^n$

$$K_0 = 8000$$

Odsetki są dopisywane co pół roku czyli 2 razy w roku. 4% w skali roku oznacza, że co pół roku dopisywane jest tylko $4\% : 2 = 2\%$.

$$p = 2\% = \frac{2}{100} = 0,02$$

Odsetki są dopisywane 2 razy w roku, więc w ciągu 5 lat będą dopisywane $2 \cdot 5 = 10$ razy.

$$n = 10$$

$$K = 8000 \cdot (1 + 0,02)^{10} = 8000 \cdot (1,02)^{10} \approx 8000 \cdot 1,22 = 9760$$

Odp. Po 5 latach na koncie będzie 9760 zł.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Wpłacasz 4000 zł na konto oprocentowane na 8% w skali roku. Ile będzie pieniędzy na koncie po 9 latach, jeżeli odsetki dopisywane są co kwartał?

Rozwiązanie:

Korzystamy z $K = K_0 \cdot (1 + p)^n$

$$K_0 = 4000$$

Odsetki są dopisywane co kwartał (trzy miesiące) czyli 4 razy w roku. 8% w skali roku oznacza, że co kwartał dopisywane jest tylko $8\% : 4 = 2\%$.

$$p = 2\% = \frac{2}{100} = 0,02$$

Odsetki są dopisywane 4 razy w roku, więc w ciągu 9 lat będą dopisywane $4 \cdot 9 = 36$ razy.

$$n = 36$$

$$K = 4000 \cdot (1 + 0,02)^{36} = 4000 \cdot (1,02)^{36} \approx 4000 \cdot 2,0399 = 8159,6$$

Odp. Po 9 latach na koncie będzie 8159,6 zł.

Nieskończony ciąg geometryczny

Suma nieskończonego ciągu geometrycznego

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

Wzór jest prawdziwy, jeżeli $-1 < q < 1$.

Przykłady:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$a_1 = 1 \quad q = \frac{1}{2}$$

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{54} + \dots$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad q = \frac{1}{3}$$

$$S = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$8 - 4 + 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \dots$$

$$a_1 = 8 \quad q = -\frac{1}{2}$$

$$S = \frac{8}{1 - (-\frac{1}{2})} = 5\frac{1}{3}$$





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz sumę nieskończonego ciągu geometrycznego

$$\triangleright 15 + 5 + \frac{5}{3} + \dots \quad \triangleright 2 + \frac{4}{5} + \frac{8}{25} + \dots$$

Zamień ułamki okresowe dziesiętne na ułamki zwykłe

$$\triangleright 0,(3) \quad \triangleright 2,(7) \quad \triangleright 0,(12) \quad \triangleright 0,2(5)$$

Oblicz sumę nieskończonego ciągu geometrycznego

$$15 + 5 + \frac{5}{3} + \dots$$

Rozwiązanie:

$$a_1 = 15$$

Korzystamy z definicji

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$5 = 15 \cdot q \quad / : 15$$

$$q = \frac{5}{15}$$

$$q = \frac{1}{3}$$

$q = \frac{1}{3}$ spełnia nierówność: $-1 < q < 1$.

$$\text{Korzystamy z } S = \frac{a_1}{1 - q}$$

$$S = \frac{15}{1 - \frac{1}{3}} = 15 : \frac{2}{3} = 15 \cdot \frac{3}{2} = \frac{45}{2} = 22\frac{1}{2}$$





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Oblicz sumę nieskończonego ciągu geometrycznego

$$2 + \frac{4}{5} + \frac{8}{25} + \dots$$

Rozwiązanie:

$$a_1 = 2$$

Korzystamy z definicji

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$\frac{4}{5} = 2 \cdot q / : 2$$

$$q = \frac{4}{5} : 2$$

$$q = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$q = \frac{2}{5}$ spełnia nierówność: $-1 < q < 1$.

Korzystamy z $S = \frac{a_1}{1 - q}$

$$S = \frac{2}{1 - \frac{2}{5}} = 2 : \frac{3}{5} = 2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$$

Zamień ułamek okresowy dziesiętny na ułamek zwykły

$$0,(3)$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}0,(3) &= 0,3333\dots \\&= 0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + \dots \\&= \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \dots\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy nieskończony ciąg geometryczny

$$a_1 = \frac{3}{10}$$
$$\frac{3}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{100} \quad \text{dlatego} \quad q = \frac{1}{10}$$

$$\text{Korzystamy z } S = \frac{a_1}{1 - q}$$

$$S = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3}{10} : \frac{9}{10} = \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Odp. } 0,(3) = \frac{1}{3}$$





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zamień ułamek okresowy dziesiętny na ułamek zwykły

$$2, (7)$$

Rozwiązanie:

$$2, (7) = 2,7777 \dots$$

$$= 2 + 0,7 + 0,07 + 0,007 + 0,0007 + \dots$$

$$= 2 + \underbrace{\frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{7}{10000} + \dots}_{\text{nieskończony ciąg geometryczny}}$$

$$a_1 = \frac{7}{10}$$

$$\frac{7}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{7}{100} \quad \text{dlatego} \quad q = \frac{1}{10}$$

$$\text{Korzystamy z } S = \frac{a_1}{1 - q}$$

$$S = \frac{\frac{7}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{7}{10} : \frac{9}{10} = \frac{7}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{7}{9}$$

$$2, (7) = 2 + \frac{7}{9} = 2\frac{7}{9}$$

$$\text{Odp. } 2, (7) = 2\frac{7}{9}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zamień ułamek okresowy dziesiętny na ułamek zwykły

$$0, (12)$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} 0, (12) &= 0,121212\dots \\ &= 0,12 + 0,0012 + 0,000012 + \dots \\ &= \frac{12}{100} + \frac{12}{10000} + \frac{12}{1000000} + \dots \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy nieskończony ciąg geometryczny

$$a_1 = \frac{12}{100}$$

$$\frac{12}{100} \cdot \frac{1}{100} = \frac{12}{10000} \quad \text{dlatego} \quad q = \frac{1}{100}$$

$$\text{Korzystamy z } S = \frac{a_1}{1 - q}$$

$$S = \frac{\frac{12}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{12}{100} : \frac{99}{100} = \frac{12}{100} \cdot \frac{100}{99} = \frac{12}{99}$$

$$\text{Odp. } 0, (12) = \frac{12}{99}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zamień ułamek okresowy dziesiętny na ułamek zwykły

$$0,2(5)$$

Rozwiązanie:

$$0,2(5) = 0,25555 \dots$$

$$= 0,2 + 0,05 + 0,005 + 0,0005 + 0,00005 + \dots$$

$$= \frac{2}{10} + \underbrace{\frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{5}{100000} + \dots}_{\text{nieskończony ciąg geometryczny}}$$

$$a_1 = \frac{5}{100}$$

$$\frac{5}{100} \cdot \frac{1}{10} = \frac{5}{1000} \quad \text{dlatego} \quad q = \frac{1}{10}$$

$$\text{Korzystamy z } S = \frac{a_1}{1 - q}$$

$$S = \frac{\frac{5}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{5}{100} : \frac{9}{10} = \frac{5}{100} \cdot \frac{10}{9} = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$$

$$0,2(5) = \frac{2}{10} + \frac{1}{18} = \frac{36}{180} + \frac{10}{180} = \frac{46}{180} = \frac{23}{90}$$

$$\text{Odp. } 0,2(5) = \frac{23}{90}$$

Przykłady granic, których wynik jest **oczywisty**.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty \quad \text{dla } 3n^2, 5n^3, 8n^5, n^7, \dots \quad \text{też } \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-n) = -\infty \quad \text{dla } -3n^2, -5n^3, -8n^5, -n^7, \dots \quad \text{też } -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{dla } \frac{-2}{n}, \frac{3}{n^2}, \frac{8}{n}, \frac{-9}{n^3}, \dots \quad \text{też } 0$$

Jeżeli $a > 1$ to $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty \quad \text{dla } 8^n, 2^n, \left(1\frac{1}{3}\right)^n, \left(\frac{5}{4}\right)^n, \dots \quad \text{też } \infty$$

Jeżeli $|a| < 1$ to $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \quad \text{dla } \left(-\frac{2}{3}\right)^n, (0,3)^n, \left(-\frac{3}{5}\right)^n, \frac{4}{7^n}, \dots \quad \text{też } 0$$



Odgadywanie prostych granic

ciąg

granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

∞

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-n) = \infty$$

-1, -2, -3, -4, -5, -6, ...

$-\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$

0

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$$

2, 4, 8, 16, 32, 64, ...

∞

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots$

0





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz granice:

$$\triangleright \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+4}$$

$$\triangleright \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{6-2n}$$

$$\triangleright \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2+5n}$$

Oblicz granice:

$$\triangleright \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2+3n-2}{2n^2+5}$$

$$\triangleright \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+2}{7n^2-2n+4}$$

$$\triangleright \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5-2n^3+5}{n^3-n+2}$$

Oblicz granice:

$$\triangleright \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n+4^n}{5^n+3^n}$$

$$\triangleright \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8^n-5}{2^n+6^n}$$

$$\triangleright \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1}+5 \cdot 3^n}{8 \cdot 4^{n-1}-7}$$





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Oblicz granice:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+4}$$

Rozwiązanie:

Wyciągamy przed nawias największą potęgę.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n \left(\frac{n}{n} + \frac{4}{n} \right)} \stackrel{\triangleright}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n \left(1 + \frac{4}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overset{0}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{2}{1 + \underset{0}{\frac{4}{n}}} = 0 \cdot \frac{2}{1} = 0$$

Korzystamy z prostych granic.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Oblicz granice:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{6 - 2n}$$

Rozwiązanie:

Wyciągamy przed nawias największą potęgę.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{6 - 2n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n \left(\frac{6}{n} - \frac{2n}{n} \right)} \stackrel{\triangleright}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n \left(\frac{6}{n} - 2 \right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{4}{\frac{6}{n} - 2} = 0 \cdot \frac{4}{-2} = 0 \end{aligned}$$

↙ ↘
0 0

Korzystamy z prostych granic.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz granice:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2 + 5n}$$

Rozwiązanie:

Wyciągamy przed nawias największą potęgę.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2 + 5n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2 \cdot \left(\frac{n^2}{n^2} + \frac{5n}{n^2}\right)} \stackrel{\triangleright}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2 \cdot \left(1 + \frac{5}{n}\right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{3}{1 + \frac{5}{n}} = 0 \cdot \frac{3}{1} = 0 \end{aligned}$$

$\searrow \quad \quad \quad \searrow$
 $0 \quad \quad \quad 0$

Korzystamy z **prostych granic**.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Oblicz granice:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 3n - 2}{2n^2 + 5}$$

Rozwiązanie:

Wyciągamy przed nawias największą potęgę.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 3n - 2}{2n^2 + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cdot \left(\frac{5n^2}{n^2} + \frac{3n}{n^2} - \frac{2}{n^2} \right)}{n^2 \cdot \left(\frac{2n^2}{n^2} + \frac{5}{n^2} \right)} \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \overset{0}{\frac{3}{n}} - \overset{0}{\frac{2}{n^2}}}{2 + \underset{0}{\frac{5}{n^2}}} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$$

Korzystamy z prostych granic.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Oblicz granice:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n + 2}{7n^2 - 2n + 4}$$

Rozwiązanie:

Wyciągamy przed nawias największą potęgę.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n + 2}{7n^2 - 2n + 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \left(\frac{4n}{n} + \frac{2}{n}\right)}{n^2 \cdot \left(\frac{7n^2}{n^2} - \frac{2n}{n^2} + \frac{4}{n^2}\right)} =$$

$$\stackrel{\triangleright}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{4 + \frac{2}{n}}{7 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}} = 0 \cdot \frac{4}{7} = 0$$

Korzystamy z prostych granic.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Oblicz granice:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 - 2n^3 + 5}{n^3 - n + 2}$$

Rozwiązanie:

Wyciągamy przed nawias największą potęgę.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 - 2n^3 + 5}{n^3 - n + 2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 \left(\frac{n^5}{n^5} - \frac{2n^3}{n^5} + \frac{5}{n^5} \right)}{n^3 \left(\frac{n^3}{n^3} - \frac{n}{n^3} + \frac{2}{n^3} \right)} = \\ &\stackrel{\triangleright}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \frac{1 - \frac{2}{n^2} + \frac{5}{n^5}}{1 - \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3}} = \infty \cdot \frac{1}{1} = \infty \end{aligned}$$

Note: In the original image, arrows indicate the limits of the terms in the fraction: $\frac{n^5}{n^5} \rightarrow \infty$, $\frac{2n^3}{n^5} \rightarrow 0$, $\frac{5}{n^5} \rightarrow 0$, $\frac{n^3}{n^3} \rightarrow 1$, $\frac{n}{n^3} \rightarrow 0$, and $\frac{2}{n^3} \rightarrow 0$.

Korzystamy z prostych granic.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Oblicz granice:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 4^n}{5^n + 3^n}$$

Rozwiązanie:

Wyciągamy przed nawias największą potęgę.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 4^n}{5^n + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n \left(\frac{2^n}{4^n} + \frac{4^n}{4^n} \right)}{5^n \left(\frac{5^n}{5^n} + \frac{3^n}{5^n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{5} \right)^n \frac{\overset{0}{\left(\frac{2}{4} \right)^n} + 1}{1 + \underset{0}{\left(\frac{3}{5} \right)^n}} = 0 \cdot \frac{1}{1} = 0$$

Korzystamy z prostych granic.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Oblicz granice:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8^n - 5}{2^n + 6^n}$$

Rozwiązanie:

Wyciągamy przed nawias największą potęgę.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8^n - 5}{2^n + 6^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8^n \left(\frac{8^n}{8^n} - \frac{5}{8^n} \right)}{6^n \left(\frac{2^n}{6^n} + \frac{6^n}{6^n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{6} \right)^n \frac{1 - 5 \left(\frac{1}{8} \right)^n}{\left(\frac{2}{6} \right)^n + 1} = \overset{\infty}{\left(\frac{8}{6} \right)^n} \cdot \overset{0}{\frac{1 - 5 \left(\frac{1}{8} \right)^n}{\left(\frac{2}{6} \right)^n + 1}} = \infty \cdot \frac{1}{1} = \infty$$

Korzystamy z prostych granic.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Oblicz granice:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1} + 5 \cdot 3^n}{8 \cdot 4^{n-1} - 7}$$

Rozwiązanie:

Na początku rozkładamy składniki ułamka, a następnie wyciągamy przed nawias największą potęgę.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1} + 5 \cdot 3^n}{8 \cdot 4^{n-1} - 7} &\triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n \cdot 4 + 5 \cdot 3^n}{8 \cdot 4^n \cdot 4^{-1} - 7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n \left(\frac{4^n \cdot 4}{4^n} + \frac{5 \cdot 3^n}{4^n} \right)}{4^n \left(\frac{8 \cdot 4^n \cdot 4^{-1}}{4^n} - \frac{7}{4^n} \right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + 5 \left(\frac{3}{4} \right)^n}{8 \cdot \frac{1}{4} - 7 \left(\frac{1}{4} \right)^n} = \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

Korzystamy z prostych granic.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Upraszczanie

Przykłady:

$$\frac{5x}{x} = 5$$

$$\frac{6x^5}{x^2} \triangleq \frac{6x^2 \cdot x^3}{x^2} = 6x^3$$

$$\frac{x^3}{x^5} \triangleq \frac{x^3}{x^3 \cdot x^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{3x^2}{x^2} = 3$$

$$\frac{4x^7}{x} \triangleq \frac{4x \cdot x^6}{x} = 4x^6$$

$$\frac{3x^2}{x^6} \triangleq \frac{3x^2}{x^2 \cdot x^4} = \frac{3}{x^4}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Upraszczanie

Przykłady:

$$\frac{5n}{n} = 5$$

$$\frac{6n^5}{n^2} \triangleright \frac{6n^2 \cdot n^3}{n^2} = 6n^3$$

$$\frac{n^3}{n^5} \triangleright \frac{n^3}{n^3 \cdot n^2} = \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{3n^2}{n^2} = 3$$

$$\frac{4n^7}{n} \triangleright \frac{4n \cdot n^6}{n} = 4n^6$$

$$\frac{3n^2}{n^6} \triangleright \frac{3n^2}{n^2 \cdot n^4} = \frac{3}{n^4}$$

Proste granice przy $x \rightarrow \infty$

Przykłady granic, których wynik jest **oczywisty**.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

dla $2x, 5x^2, 7x^3, \dots$

też ∞

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (-x) = -\infty$$

dla $-2x, -5x^2, -7x^3, \dots$

też $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

dla $\frac{1}{2x}, -\frac{5}{x^2}, \frac{7}{x^3}, -\frac{9}{x^4}, \dots$

też 0



Odgadywanie prostych granic przy $x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2x = \infty$$

x	1	2	3	4	$\rightarrow$	∞
$2x$	2	4	6	8	$\rightarrow$	∞

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-2x) = -\infty$$

x	1	2	3	4	$\rightarrow$	∞
$-2x$	-2	-4	-6	-8	$\rightarrow$	$-\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} = 0$$

x	1	2	3	4	$\rightarrow$	∞
$\frac{1}{2x}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\rightarrow$	0

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{5}{x^2} \right) = 0$$

x	1	2	3	4	$\rightarrow$	∞
$-\frac{5}{x^2}$	$-\frac{5}{1}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{9}$	$-\frac{5}{16}$	$\rightarrow$	0





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

Proste granice przy $x \rightarrow -\infty$

Przykłady granic, których wynik jest **oczywisty**.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \quad \text{dla } \overbrace{x^3, x^5, 2x^7, \dots}^{\text{nieparzyste}} \quad \text{też } -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \infty \quad \text{dla } \overbrace{x^4, x^6, 3x^8, \dots}^{\text{parzyste}} \quad \text{też } \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{dla } -\frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, -\frac{2}{x^4}, \frac{3}{x^5}, \dots \quad \text{też } 0$$



matma235@o2.pl



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Odgadywanie prostych granic przy $x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty$$

x	-1	-2	-3	-4	$\rightarrow -\infty$
x^3	-1	-8	-27	-64	$\rightarrow -\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^2 = -\infty$$

x	-1	-2	-3	-4	$\rightarrow \infty$
x^2	1	4	9	16	$\rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

x	-1	-2	-3	-4	$\rightarrow \infty$
$\frac{1}{2x}$	$-\frac{1}{1}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$\rightarrow 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

x	-1	-2	-3	-4	$\rightarrow \infty$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$	$\rightarrow 0$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz granice:

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 5x + 2)$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2x^3 - 3x}$$

Oblicz granice:

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 4x + 5}{7x^3 - 8x + 4}$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 8x^2}{2x^4 - 3x + 2}$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow \infty} (-2x^3 + x^2 - 4)$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow \infty} (-3x^2 \sqrt{5x^2 + 7})$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 2x^3 + 3x}{x^2 - 1}$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^5 + 2x^3 - 1}{5x + 7}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz granice:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 5x + 2)$$

Rozwiązanie:

Wyciągamy przed nawias największą potęgę:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 5x + 2) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{5x}{x^2} + \frac{2}{x^2} \right) =$$

$$\stackrel{\triangleright}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} \right) = \overset{\infty}{\lim_{x \rightarrow \infty} x^2} \cdot \overset{0}{\left(1 - \frac{5}{x} \right)} \cdot \overset{0}{\frac{2}{x^2}} = \infty \cdot 1 = \infty$$

Korzystamy z prostych granic przy $x \rightarrow \infty$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz granice:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (-2x^3 + x^2 - 4)$$

Rozwiązanie:

Wyciągamy przed nawias największą potęgę:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (-2x^3 + x^2 - 4) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(\frac{-2x^3}{x^3} + \frac{x^2}{x^3} - \frac{4}{x^3} \right) =$$

$$\stackrel{\triangleright}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(-2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^3} \right) = \overset{\infty}{x^3} \cdot \overset{0}{\left(-2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^3} \right)} = \infty \cdot (-2) = -\infty$$

Korzystamy z prostych granic przy $x \rightarrow \infty$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz granice:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2x^3 - 3x}$$

Rozwiązanie:

Wyciągamy przed nawias największą potęgę:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2x^3 - 3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^3 \left(\frac{2x^3}{x^3} - \frac{3x}{x^3} \right)} \triangleq \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^3 \left(2 - \frac{3}{x^2} \right)} = \infty$$

$\searrow \quad \quad \quad \searrow$
 $\infty \quad \quad \quad 0$

Korzystamy z prostych granic przy $x \rightarrow \infty$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz granice:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-3x^2 \sqrt{5x^2 + 7} \right)$$

Rozwiązanie:

Wyciągamy przed nawias największą potęgę:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-3x^2 \sqrt{5x^2 + 7} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-3x^2 \sqrt{x^2 \left(\frac{5x^2}{x^2} + \frac{7}{x^2} \right)} \right)$$

$$\stackrel{\triangleright}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\underbrace{-3x^2}_{-\infty} \underbrace{\sqrt{x^2}_{\infty}} \underbrace{\left(5 + \frac{7}{x^2} \right)}_0 \right) = -\infty \cdot \infty = -\infty$$

Korzystamy z prostych granic przy $x \rightarrow \infty$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Oblicz granice:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 4x + 5}{7x^3 - 8x + 4}$$

Rozwiązanie:

Wyciągamy przed nawias największą potęgę:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 4x + 5}{7x^3 - 8x + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left(\frac{2x^3}{x^3} - \frac{4x}{x^3} + \frac{5}{x^3} \right)}{x^3 \left(\frac{7x^3}{x^3} - \frac{8x}{x^3} + \frac{4}{x^3} \right)} \triangleright \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3}}{7 - \frac{8}{x^2} + \frac{4}{x^3}} = \frac{2}{7}$$

0 0
↖ ↖
↘ ↘
0 0

Korzystamy z prostych granic przy $x \rightarrow \infty$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Oblicz granice:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 2x^2 + 3x}{x^2 - 1}$$

Rozwiązanie:

Wyciągamy przed nawias największą potęgę:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 2x^2 + 3x}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 \left(\frac{x^5}{x^5} - \frac{2x^2}{x^5} + \frac{3x}{x^5} \right)}{x^2 \left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \cdot \frac{1 - \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \infty \cdot \frac{1}{1} = \infty \end{aligned}$$

Annotations in the original image: Arrows point from the infinity symbol to the x^3 term (labeled ∞), from the 1 in the numerator to the $1 - \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4}$ fraction (labeled 0), from the 1 in the denominator to the $1 - \frac{1}{x^2}$ fraction (labeled 0), and from the 1 in the denominator to the $\frac{1}{1}$ result (labeled 0).

Korzystamy z prostych granic przy $x \rightarrow \infty$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Oblicz granice:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 8x^2}{2x^4 - 3x + 2}$$

Rozwiązanie:

Wyciągamy przed nawias największą potęgę:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 8x^2}{2x^4 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left(\frac{x^3}{x^3} - \frac{8x^2}{x^3} \right)}{x^4 \left(\frac{2x^4}{x^4} - \frac{3x}{x^4} + \frac{2}{x^4} \right)} =$$

$$\stackrel{\triangleright}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1 - \frac{8}{x}}{2 - \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^4}} = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

Korzystamy z prostych granic przy $x \rightarrow \infty$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Oblicz granice:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^5 + 2x^3 - 1}{5x + 7}$$

Rozwiązanie:

Wyciągamy przed nawias największą potęgę:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^5 + 2x^3 - 1}{5x + 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 \left(\frac{-3x^5}{x^5} - \frac{2x^3}{x^5} - \frac{1}{x^5} \right)}{x \left(\frac{5x}{x} + \frac{7}{x} \right)} =$$

$$\triangleq \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 \cdot \frac{-3 - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^5}}{5 + \frac{7}{x}} = \infty \cdot \frac{-3}{5} = -\infty$$

Korzystamy z prostych granic przy $x \rightarrow \infty$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz granice:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x + 4)$$

Rozwiązanie:

Wyciągamy przed nawias największą potęgę:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x + 4) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(\frac{x^3}{x^3} - \frac{2x}{x^3} + \frac{4}{x^3} \right) =$$

$$\stackrel{\triangleright}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right) = -\infty \cdot 1 = -\infty$$

Korzystamy z prostych granic przy $x \rightarrow -\infty$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz granice:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 2x^2 + 5x)$$

Rozwiązanie:

Wyciągamy przed nawias największą potęgę:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 2x^2 + 5x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \left(\frac{x^4}{x^4} - \frac{2x^2}{x^4} + \frac{5x}{x^4} \right) =$$

$$\stackrel{\triangleright}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{5}{x^3} \right) = \overset{\infty}{x^4} \cdot \overset{0}{\left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{5}{x^3} \right)} = \infty \cdot 1 = \infty$$

Korzystamy z prostych granic przy $x \rightarrow -\infty$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Oblicz granice:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x + 5)$$

Rozwiązanie:

Wyciągamy przed nawias największą potęgę:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x + 5) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\frac{-3x}{x} - \frac{5}{x} \right) =$$

$$\stackrel{\triangleright}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-3 - \frac{5}{x} \right) = \overset{-\infty}{\nearrow} x \overset{0}{\nearrow} \left(-3 - \frac{5}{x} \right) = -\infty \cdot (-3) = \infty$$

Korzystamy z prostych granic przy $x \rightarrow -\infty$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz granice:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x^2 - 3x + 1)$$

Rozwiązanie:

Wyciągamy przed nawias największą potęgę:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x^2 - 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(\frac{-5x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right) =$$

$$\stackrel{\substack{\nearrow \infty \\ \nearrow 0 \\ \nearrow 0}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(-5 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = \infty \cdot (-5) = -\infty$$

Korzystamy z prostych granic przy $x \rightarrow -\infty$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz granice:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{6x^2 - 3x + 1}$$

Rozwiązanie:

Wyciągamy przed nawias największą potęgę:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{6x^2 - 3x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 \left(\frac{6x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right)} = \\ &\stackrel{\triangleright}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 \left(6 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} = \infty \end{aligned}$$

$\searrow \quad \searrow \quad \searrow$
 $\infty \quad 0 \quad 0$

Korzystamy z prostych granic przy $x \rightarrow -\infty$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Oblicz granice:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \sqrt{x^4 - 2x^3}$$

Rozwiązanie:

Wyciągamy przed nawias największą potęgę:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \sqrt{x^4 - 2x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \sqrt{x^4 \left(\frac{x^4}{x^4} - \frac{2x^3}{x^4} \right)} =$$

$$\stackrel{\triangleright}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \underset{-\infty}{x} \sqrt{x^4 \left(\underset{\infty}{1} - \underset{0}{\frac{2}{x}} \right)} = -\infty \cdot \infty = -\infty$$

Korzystamy z prostych granic przy $x \rightarrow -\infty$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Oblicz granice:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{4x^2 - 5}$$

Rozwiązanie:

Wyciągamy przed nawias największą potęgę:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{4x^2 - 5} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(\frac{2x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left(\frac{4x^2}{x^2} - \frac{5}{x^2} \right)} \\ &\stackrel{\triangleright}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{4 - \frac{5}{x^2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

0 0
↗ ↗
↘ ↘
0

Korzystamy z prostych granic przy $x \rightarrow -\infty$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Oblicz granice:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^3 + 3x}{x^3 - 5x}$$

Rozwiązanie:

Wyciągamy przed nawias największą potęgę:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^3 + 3x}{x^3 - 5x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 \left(\frac{x^4}{x^4} - \frac{2x^3}{x^4} + \frac{3x}{x^4} \right)}{x^3 \left(\frac{x^3}{x^3} - \frac{5x}{x^3} \right)} \\ &\stackrel{\triangleright}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^3}}{1 - \frac{5}{x^2}} = -\infty \cdot \frac{1}{1} = -\infty \end{aligned}$$

Annotations in the original image: Arrows point from x to $-\infty$, from $1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^3}$ to 0 , from $1 - \frac{5}{x^2}$ to 0 , and from the final result $-\infty$ to 0 .

Korzystamy z prostych granic przy $x \rightarrow -\infty$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Oblicz granice:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^2 + 1}{x^5 - 2x^3 + x^2}$$

Rozwiązanie:

Wyciągamy przed nawias największą potęgę:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^2 + 1}{x^5 - 2x^3 + x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(\frac{-3x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right)}{x^5 \left(\frac{x^5}{x^5} - \frac{2x^3}{x^5} + \frac{x^2}{x^5} \right)}$$

$$\begin{aligned} & \triangleq \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} \cdot \frac{-3 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = 0 \cdot \frac{-3}{1} = 0 \end{aligned}$$

(Arrows indicate the limits of the terms: $\frac{1}{x^3} \rightarrow 0$, $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$, $\frac{2}{x^2} \rightarrow 0$, and $\frac{1}{x^3} \rightarrow 0$.)

Korzystamy z prostych granic przy $x \rightarrow -\infty$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Oblicz granice:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x^5 + 3x}{x^2 - 2}$$

Rozwiązanie:

Wyciągamy przed nawias największą potęgę:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x^5 + 3x}{x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 \left(\frac{-5x^5}{x^5} + \frac{3x}{x^5} \right)}{x^2 \left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2} \right)}$$

$$\stackrel{\triangleright}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \cdot \frac{\overset{-\infty}{-5} + \overset{0}{\frac{3}{x^4}}}{\underset{0}{1 - \frac{2}{x^2}}} = -\infty \cdot \frac{-5}{1} = \infty$$

Korzystamy z prostych granic przy $x \rightarrow -\infty$

wzory, twierdzenia, definicje

- wyrażenia nieoznaczone
- granica funkcji w ∞
- granica funkcji w $-\infty$
- granica właściwa funkcji w punkcie
- definicja pochodnej funkcji
- proste pochodne
- działania na pochodnych
- styczna do krzywej
- badanie monotoniczności za pomocą pochodnej
- ekstrema

przykłady

- 
- spis treści
 - symbole
 - zgłoś błąd
 - 13 kwiecień



Wzory, definicje, twierdzenia (Granica i pochodna funkcji)

- 
- spis treści
 - symbole
 - zgłoś błąd
 - 13 kwiecień

- Proste granice przy $x \rightarrow \infty$
- Proste granice przy $x \rightarrow -\infty$
- Wyrażenia nieoznaczone
- Definicja pochodnej funkcji
- Proste pochodne
- Działania na pochodnych
- Styczna do krzywej
- Badanie monotoniczności za pomocą pochodnej
- Ekstrema





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz granice:

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x + 4)$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x + 5)$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{6x^2 - 3x + 1}$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 2x^2 + 5x)$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x^2 - 3x + 1)$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow -\infty} x \sqrt{x^4 - 2x^3}$$

Oblicz granice:

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{4x^2 - 5}$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^2 + 1}{x^5 - 2x^3 + x^2}$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^3 + 3x}{x^3 - 5x}$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x^5 + 3x}{x^2 - 2}$$

Wyrażenia nieoznaczone

Przy liczeniu granicy funkcji możemy otrzymać wyrażenie nieoznaczone:

$$\frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad 0 \cdot \infty \quad \infty - \infty \quad -\infty + \infty$$

Należy wtedy zacząć liczyć od początku, przekształcając funkcję w inny sposób.

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień





Granica właściwa funkcji w punkcie

Oblicz granice:

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 5} x^2$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 4x + 1)$$

Oblicz granice:

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{x^2 - 4}$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - x - 2}$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$$

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwietnia



matma235@o2.pl

Oblicz granice:

$$\lim_{x \rightarrow 5} x^2$$

Rozwiązanie:

Dla prostych funkcji granice liczymy tak:

$$\lim_{x \rightarrow 5} x^2 = 5^2 = 25$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz granice:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 4x + 1)$$

Rozwiązanie:

Dla prostych funkcji granice liczymy tak:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 4x + 1) = 2^3 - 4 \cdot 2 + 1 = 8 - 8 + 1 = 1$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz granice:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Rozwiązanie:

Jeżeli za x podstawimy 1 to otrzymamy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$

Liczymy inaczej:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \triangleq \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz granice:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2-4}$$

Rozwiązanie:

Jeżeli za x podstawimy -2 to otrzymamy **wyrażenie nieoznaczone** $\frac{0}{0}$

Liczymy inaczej:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2-4} \stackrel{!}{=} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{-2-2} = -\frac{1}{4}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Oblicz granice:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

Rozwiązanie:

Jeżeli za x podstawimy 2 to otrzymamy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$

Liczymy inaczej:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} &\stackrel{p}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) = 2^2 + 2 \cdot 2 + 4 = 4 + 4 + 4 = 12 \end{aligned}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Oblicz granice:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$$

Rozwiązanie:

Jeżeli za x podstawimy 3 to otrzymamy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$
Liczymy inaczej:

$$x^2 - 4x + 3$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{4} = 2$$

$$x_1 = \frac{-(-4) - 2}{2 \cdot 1} = \frac{4 - 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-(-4) + 2}{2 \cdot 1} = \frac{4 + 2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

postać iloczynowa: $(x - 1)(x - 3)$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 1)(x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x - 1) = 3 - 1 = 2$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz granice:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - x - 2}$$

Rozwiązanie:

Jeżeli za x podstawimy 2 to otrzymamy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$

Liczymy inaczej:

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

$$x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)^2}{(x + 1)(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x + 1} = \frac{2 - 2}{2 + 1} = \frac{0}{3} = 0$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$x^2 - 4x + 4$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$$

$$x_1 = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$$

postać iloczynowa: $(x - 2)^2$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

$$x^2 - x - 2$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$$

$$x_1 = \frac{-(-1) - 3}{2 \cdot 1} = \frac{1 - 3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-(-1) + 3}{2 \cdot 1} = \frac{1 + 3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{postać iloczynowa: } (x - (-1))(x - 2) = (x + 1)(x - 2)$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Oblicz granice:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$$

Rozwiązanie:

Jeżeli za x podstawimy 1 to otrzymamy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$

Liczymy inaczej:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2)^2 - 1}{x - 1} \stackrel{\triangleright}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x - 1} =$$

$$\stackrel{\triangleright}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1)(x^2 + 1) =$$

$$= (1 + 1)(1^2 + 1) = 2 \cdot 2 = 4$$

Definicja pochodnej funkcji

Jeżeli istnieje skończona granica

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

to nazywamy ją **pochodną funkcji** w punkcie x_0 .

Określenie, funkcja jest **różniczkowalna** w punkcie x_0 , oznacza, że funkcja ma pochodną w punkcie x_0 .





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl



Korzystając z definicji, oblicz pochodną funkcji f w punkcie x_0

$$\triangleright f(x) = 4x \quad x_0 = 3$$

$$\triangleright f(x) = 3x^2 + 4 \quad x_0 = 5$$

$$\triangleright f(x) = \frac{3}{x+2} \quad x_0 = 4$$

$$\triangleright f(x) = \sqrt{x} \quad x_0 = 1$$

Oblicz pochodną funkcji:

$$\triangleright f(x) = 5x$$

$$\triangleright f(x) = x^4$$

$$\triangleright f(x) = 3x^7$$

$$\triangleright f(x) = 5x - 3$$

$$\triangleright f(x) = x^5 + x^2 + 4$$

$$\triangleright f(x) = 6x^4 - 3x^2 + 5x$$

$$\triangleright f(x) = 3\sqrt{x}$$

$$\triangleright f(x) = \sqrt[3]{x^2}$$

$$\triangleright f(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$\triangleright f(x) = \frac{4}{x} + \sqrt{x}$$

Oblicz pochodną funkcji:

$$\triangleright f(x) = \frac{x}{x+3}$$

$$\triangleright f(x) = \frac{3x+4}{2x-1}$$

$$\triangleright f(x) = \frac{x^2-2x}{x^3}$$

Proste pochodne

Wzory:

$$(c)' = 0$$

$$(ax)' = a$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$\left(\frac{a}{x}\right)' = -\frac{a}{x^2}$$

$$\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Przykłady:

$$(2)' = 0$$

$$(100)' = 0$$

$$(x)' = 1$$

$$(3x)' = 3$$

$$(x^3)' = 3x^2$$

$$(x^5)' = 5x^4$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{3}{x}\right)' = -\frac{3}{x^2}$$

- 
- spis treści
 - symbole
 - zgłoś błąd
 - 13 kwiecień





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Działania na pochodnych

Wzory:

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(f - g)' = f' - g'$$

$$(c \cdot f)' = c \cdot f'$$

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Przykłady:

$$(x^2 + x^3)' = (x^2)' + (x^3)' \stackrel{\triangleright}{=} 2x + 3x^2$$

$$(x^4 - x)' = (x^4)' - (x)' \stackrel{\triangleright}{=} 4x^3 - 1$$

$$(5x^3)' = 5 \cdot (x^3)' = 5 \cdot 3x^2 = 15x^2$$

$$\begin{aligned}(x^2 \sqrt{x})' &= (x^2)' \sqrt{x} + x^2 (\sqrt{x})' = \\ &\stackrel{\triangleright}{=} 2x \sqrt{x} + x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \\ &= 2x \sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x}}\right)' &= \frac{(x^2)' \sqrt{x} - x^2 (\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} = \\ &\stackrel{\triangleright}{=} \frac{2x \sqrt{x} - x^2 \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \\ &= \frac{x(2\sqrt{x} - x \frac{1}{2\sqrt{x}})}{x} = 2\sqrt{x} - \frac{x}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

Korzystając z definicji, oblicz pochodną funkcji f w punkcie x_0

$$f(x) = 4x \quad x_0 = 3$$

Rozwiązanie:

Definicja pochodnej

$$f(3) = 4 \cdot 3 = 12$$

$$f(3 + h) = 4 \cdot (3 + h) = 12 + 4h$$

$$f'(3) \triangleq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12 + 4h - 12}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h}{h} \triangleq 4$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Korzystając z definicji, oblicz pochodną funkcji f w punkcie x_0

$$f(x) = 3x^2 + 4 \quad x_0 = 5$$

Rozwiązanie:

Definicja pochodnej

$$f(5) = 3 \cdot 5^2 + 4 = 3 \cdot 25 + 4 = 79$$

$$\begin{aligned} f(5+h) &= 3 \cdot (5+h)^2 + 4 \stackrel{\triangleright}{=} 3(25 + 10h + h^2) + 4 = \\ &= 75 + 30h + 3h^2 + 4 = 79 + 30h + 3h^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(5) &\stackrel{\triangleright}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{79 + 30h + 3h^2 - 79}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(30 + 3h)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (30 + 3h) \stackrel{\triangleright}{=} 30 + 3 \cdot 0 = 30 \end{aligned}$$



Korzystając z definicji, oblicz pochodną funkcji f w punkcie x_0

$$f(x) = \frac{3}{x+2} \quad x_0 = 4$$

Rozwiązanie:

Definicja pochodnej

$$f(4) = \frac{3}{4+2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$f(4+h) = \frac{3}{4+h+2} = \frac{3}{6+h}$$

$$\begin{aligned} f'(4) &\triangleq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{6+h} - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{6}{2(6+h)} - \frac{6+h}{2(6+h)}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6 - 6 - h}{2(6+h)} \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{2(6+h)} \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{2(6+h)} = \\ &\triangleq \frac{-1}{2(6+0)} = -\frac{1}{12} \end{aligned}$$



spis treści
symbole
zgłoś błąd
13 kwiecień



matma235@o2.pl

Korzystając z definicji, oblicz pochodną funkcji f w punkcie x_0

$$f(x) = \sqrt{x} \quad x_0 = 1$$

Rozwiązanie:

Definicja pochodnej

$$f(1) = \sqrt{1} = 1$$

$$f(1+h) = \sqrt{1+h}$$

$$\begin{aligned} f'(1) &\triangleq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+h} - 1)(\sqrt{1+h} + 1)}{h(\sqrt{1+h} + 1)} \triangleq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+h})^2 - 1^2}{h(\sqrt{1+h} + 1)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + h - 1}{h(\sqrt{1+h} + 1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{1+h} + 1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+h} + 1} = \\ &\triangleq \frac{1}{\sqrt{1+0} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz pochodną funkcji

$$f(x) = 5x$$

Rozwiązanie:

$$f'(x) = (5x)' \stackrel{\triangleright}{=} 5$$

matma235@o2.pl



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz pochodną funkcji

$$f(x) = x^4$$

Rozwiązanie:

$$f'(x) = (x^4)' \stackrel{\triangleright}{=} 4x^3$$

matma235@o2.pl



Oblicz pochodną funkcji

$$f(x) = 3x^7$$

Rozwiązanie:

$$f'(x) = (3x^7)' = 3(x^7)' \stackrel{\triangleright}{=} 3 \cdot 7x^6 = 21x^6$$



matma235@o2.pl

Oblicz pochodną funkcji

$$f(x) = 5x - 3$$

Rozwiązanie:

$$f'(x) = (5x - 3)' = (5x)' - (3)' \triangleq 5 - 0 = 5$$

spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Oblicz pochodną funkcji

$$f(x) = x^5 + x^2 + 4$$

Rozwiązanie:

$$f'(x) = (x^5 + x^2 + 4)' \triangleq (x^5)' + (x^2)' + (4)' \triangleq 5x^4 + 2x + 0 = 5x^4 + 2x$$

spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Oblicz pochodną funkcji

$$f(x) = 6x^4 - 3x^2 + 5x$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (6x^4 - 3x^2 + 5x)' \stackrel{\triangleright}{=} (6x^4)' - (3x^2)' + (5x)' = \\ &\stackrel{\triangleright}{=} 6(x^4)' - 3(x^2)' + 5(x)' \stackrel{\triangleright}{=} 6 \cdot 4x^3 - 3 \cdot 2x + 5 \cdot 1 = 24x^3 - 6x + 5 \end{aligned}$$

spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Oblicz pochodną funkcji

$$f(x) = 3\sqrt{x}$$

Rozwiązanie:

$$f(x)' = (3\sqrt{x})' \stackrel{\triangleright}{=} 3(\sqrt{x})' \stackrel{\triangleright}{=} 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2\sqrt{x}}$$



matma235@o2.pl

Oblicz pochodną funkcji

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} f(x)' &= (\sqrt[3]{x^2})' \triangleq \left((x^2)^{\frac{1}{3}} \right)' = \left(x^{\frac{2}{3}} \right)' \triangleq \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \\ &\triangleq \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \end{aligned}$$





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz pochodną funkcji

$$f(x) = \frac{2}{x^3}$$

Rozwiązanie:

$$f'(x) = \left(\frac{2}{x^3} \right)' \triangleq (2x^{-3}) \triangleq 2 \cdot (-3)x^{-3-1} = -6x^{-4} = \frac{-6}{x^4}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz pochodną funkcji

$$f(x) = \frac{4}{x} + \sqrt{x}$$

Rozwiązanie:

$$f'(x) = \left(\frac{4}{x} + \sqrt{x} \right)' \triangleq \left(\frac{4}{x} \right)' + (\sqrt{x})' \triangleq -\frac{4}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Oblicz pochodną funkcji

$$f(x) = \frac{x}{x+3}$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} f(x)' &= \left(\frac{x}{x+3} \right)' \triangleq \frac{(x)'(x+3) - x(x+3)'}{(x+3)^2} = \\ &\triangleq \frac{1 \cdot (x+3) - x \cdot 1}{(x+3)^2} \triangleq \frac{x+3-x}{x^2+6x+9} = \frac{3}{x^2+6x+9} \end{aligned}$$





symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień


$$f(x) = \frac{3x + 4}{2x - 1}$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} f(x)' &= \left(\frac{3x+4}{2x-1} \right)' \triangleq \frac{(3x+4)'(2x-1) - (3x+4)(2x-1)'}{(2x-1)^2} = \\ &\triangleq \frac{3 \cdot (2x-1) - (3x+4) \cdot 2}{(2x-1)^2} \triangleq \frac{6x-3-6x-8}{4x^2-4x+1} = \frac{-11}{4x^2-4x+1} \end{aligned}$$

Oblicz pochodną funkcji

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^3}$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} f(x)' &= \left(\frac{x^2 - 2x}{x^3} \right)' \triangleright \frac{(x^2 - 2x)'x^3 - (x^2 - 2x)(x^3)'}{(x^3)^2} = \\ &\triangleright \frac{(2x - 2) \cdot x^3 - (x^2 - 2x) \cdot 3x^2}{(x^3)^2} \\ &\triangleright \frac{2x^4 - 2x^3 - 3x^4 + 6x^3}{x^6} = \frac{-x^4 + 4x^3}{x^6} \end{aligned}$$





Zastosowanie pochodnej

▷ Znajdź równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^3$ w punkcie o współrzędnej $x_0 = 2$.

Zbadaj monotoniczność funkcji:

▷ $f(x) = x^3 + 6x$

▷ $f(x) = -2x^5 - x^3$

▷ $f(x) = x^3 - 12x$

▷ $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x + 5$

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień





spis treści

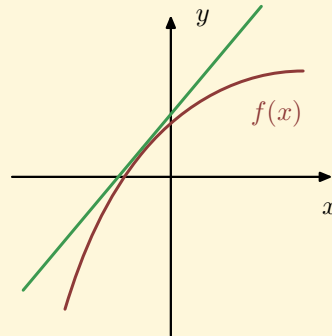
symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Styczna do krzywej



Równanie stycznej

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Znajdź równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^3$ w punkcie o współrzędnej $x_0 = 2$.

Rozwiązanie:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$x_0 = 2$$

$$f(2) = 2^3 = 8$$

$$f'(x) = (x^3)' \stackrel{\Delta}{=} 3x^2$$

$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$$

$$y - 8 = 12(x - 2)$$

$$y - 8 = 12x - 24$$

$$y = 12x - 24 + 8$$

$$y = 12x - 16$$

Badanie monotoniczności funkcji za pomocą pochodnej

Jeżeli dla każdego $x \in (a, b)$

$$f'(x) > 0$$

to funkcja $f(x)$ jest **rosnąca** w przedziale (a, b) .

Jeżeli dla każdego $x \in (a, b)$

$$f'(x) < 0$$

to funkcja $f(x)$ jest **malejąca** w przedziale (a, b) .

- 
- spis treści
 - symbole
 - zgłoś błąd
 - 13 kwiecień





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Zbadaj monotoniczność funkcji

$$f(x) = x^3 + 6x$$

Rozwiązanie:

$$f(x) = x^3 + 6x$$

$$f'(x) = (x^3 + 6x)' \stackrel{\triangleright}{=} 3x^2 + 6 = 3(x^2 + 2) > 0 \text{ dla wszystkich } x \in \mathbf{R}$$

$f'(x) > 0$ dla $x \in \mathbf{R}$ co **oznacza**, że funkcja jest rosnąca.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Zbadaj monotoniczność funkcji

$$f(x) = -2x^5 - x^3$$

Rozwiązanie:

$$f(x) = -2x^5 - x^3$$

$$f'(x) = (-2x^5 - x^3)' \stackrel{!}{=} -10x^4 - 3x^2 = -10(x^4 + \frac{3}{10}x^2) = -10x^2(x^2 + \frac{3}{10})$$

$$\text{dla wszystkich } x \in \mathbf{R} \quad \begin{cases} x^2 > 0 \\ x^2 + \frac{3}{10} > 0 \end{cases} \quad \text{więc } -10x^2(x^2 + \frac{3}{10}) < 0$$

$f'(x) < 0$ dla $x \in \mathbf{R}$ co **oznacza**, że funkcja jest malejąca.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zbadaj monotoniczność funkcji

$$f(x) = x^3 - 12x$$

Rozwiązanie:

$$f(x) = x^3 - 12x$$

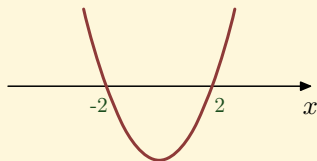
$$f'(x) = (x^3 - 12x)' \stackrel{\triangleright}{=} 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) \stackrel{\triangleright}{=} 3(x - 2)(x + 2)$$

$$f'(x) = 3(x - 2)(x + 2)$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -2$$

wykresem pochodnej jest parabola



$f'(x) < 0$ dla $x \in (-2, 2)$ co **oznacza**, że funkcja $f(x)$ jest w tym przedziale malejąca.

$f'(x) > 0$ dla $x \in (-\infty, -2)$ i dla $x \in (2, \infty)$ co **oznacza**, funkcja $f(x)$ jest w tych przedziałach rosnąca.

spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zbadaj monotoniczność funkcji

$$f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x + 5$$

Rozwiązanie:

$$f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x + 5$$

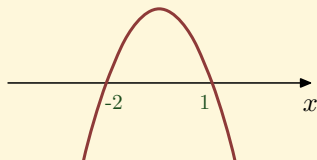
$$f'(x) = (-2x^3 - 3x^2 + 12x + 5)' \stackrel{\Delta}{=} -6x^2 - 6x + 12 = -6(x^2 + x - 2)$$

$$x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$$

$$f'(x) = -6(x + 2)(x - 1)$$

$$x_1 = -2 \quad x_2 = 1$$

wykresem pochodnej jest parabola



$f'(0) > 0$ dla $x \in (-2, 1)$ co **oznacza**, że funkcja $f(x)$ jest w tym przedziale rosnąca.

$f'(0) < 0$ dla $x \in (-\infty, -2)$ i dla $x \in (1, \infty)$ co **oznacza**, że funkcja $f(x)$ jest w tym przedziale malejąca.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$x^2 + x - 2$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$$

$$x_1 = \frac{-1 - 3}{2 \cdot 1} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-1 + 3}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$$

postać iloczynowa: $(x - (-2))(x - 1) = (x + 2)(x - 1)$

$$x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

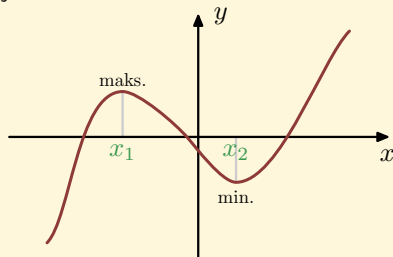
13 kwiecień



matma235@o2.pl

Ekstrema

Ekstremum funkcji to lokalne **minimum** lub **maksimum**.



Ekstrema funkcji wyznaczamy rozwiązując równanie

$$f'(x_0) = 0$$

a następnie **badając** znak pochodnej wokół rozwiązania.

Maksimum

x		x_1	
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	maks.	↘

rośnie maleje

Minimum

x		x_2	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	min.	↗

maleje rośnie



Wyznacz ekstrema funkcji.

▷ $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x - 3$

▷ $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x - 18$

spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Wyznacz ekstremum funkcji

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x - 3$$

Rozwiązanie:

Wartość pochodnej w **ekstremum** jest równa 0.

$$f'(0) = 0$$

$$f'(x) = (x^3 + 6x^2 + 9x - 3)' \stackrel{!}{=} 3x^2 + 12x + 9$$

$$3x^2 + 12x + 9 = 0$$

$$3x^2 + 12x + 9 = 3(x+1)(x+3)$$

$$3(x+1)(x+3) = 0$$

$$x_1 = -1 \quad x_2 = -3$$

wykres pochodnej i tabela

$$\text{Maksimum: } f(-3) = -3$$

$$\text{Minimum: } f(1) = -7$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$3x^2 + 12x + 9 = 3(x^2 + 4x + 3)$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{4} = 2$$

$$x_1 = \frac{-4 - 2}{2 \cdot 1} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$x_2 = \frac{-4 + 2}{2 \cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\text{postać iloczynowa: } (x - (-3))(x - (-1)) = (x + 3)(x + 1)$$

$$3x^2 + 12x + 9 = 3(x + 3)(x + 1)$$



spis treści

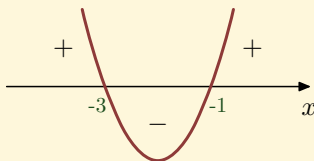
symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$f'(x) = 3(x+1)(x+3)$$



x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, -1)$	-1	$(-1, \infty)$
$f'(x)$	$+$ ▷	0	$-$ ▷	0	$+$ ▷
$f(x)$	↗	maks.	↘	min.	↗

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x - 3$$

$$\text{Maksimum: } f(-3) = (-3)^3 + 6(-3)^2 + 9(-3) - 3 = -27 + 54 - 27 - 3 = -3$$

$$\text{Minimum: } f(-1) = (-1)^3 + 6(-1)^2 + 9(-1) - 3 = -1 + 6 - 9 - 3 = -7$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Wyznacz ekstremum funkcji

$$f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x - 18$$

Rozwiązanie:

Wartość pochodnej w **ekstremum** jest równa 0.

$$f'(0) = 0$$

$$f'(x) = (-2x^3 - 3x^2 + 12x - 18)' \stackrel{!}{=} -6x^2 - 6x + 12$$

$$-6x^2 - 6x + 12 = 0$$

$$-6x^2 - 6x + 12 = -6(x - 1)(x + 2)$$

$$-6(x - 1)(x + 2) = 0$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = -2$$

wykres pochodnej i tabela

$$\text{Maksimum: } f(1) = -11$$

$$\text{Minimum: } f(-2) = -38$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$-6x^2 - 6x + 12 = -6(x^2 + x - 2)$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$$

$$x_1 = \frac{-1 - 3}{2 \cdot 1} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-1 + 3}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$$

postać iloczynowa: $(x - (-2))(x - 1) = (x + 2)(x - 1)$

$$-6x^2 - 6x + 12 = -6(x + 2)(x - 1)$$



spis treści

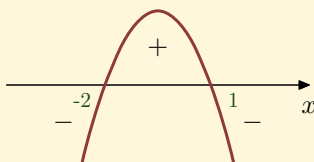
symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$f'(x) = -6(x-1)(x+2)$$



x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$- \triangleright$	0	$+ \triangleright$	0	$- \triangleright$
$f(x)$	$\searrow$	min.	$\nearrow$	maks.	$\searrow$

$$f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x - 18$$

$$\begin{aligned}\text{Minimum: } f(-2) &= -2(-2)^3 - 3(-2)^2 + 12(-2) - 18 = \\ &= 16 - 12 - 24 - 18 = -38\end{aligned}$$

$$\text{Maksimum: } f(1) = -2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 - 18 = -2 - 3 + 12 - 18 = -11$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

Nowe wersje tego opracowania będą ukazywać się dwa razy w roku we wrześniu i styczniu.
Do ściągnięcia ze strony:

www.matma.boo.pl

www.matma235.prv.pl



matma235@o2.pl



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Ebook ten możesz swobodnie przysyłać za pomocą email, komunikatorów i sieci p2p. Jeżeli chcesz zamieścić go na swojej stronie www lub wykorzystać w inny sposób skontaktuj się z autorem (matma235@o2.pl) w celu uzyskania zgody. Treść tego ebook'a może ulec zmianie tylko po skontaktowaniu się z autorem i uzyskaniu na to zgody.

matma235@o2.pl

Funkcje trygonometryczne w trójkącie prostokątnym

$$\sin \alpha = \frac{\text{przyprostokątna } \textcolor{teal}{\text{naprzeciw } \alpha}}{\text{przeciwprostokątna}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{przyprostokątna } \textcolor{teal}{\text{przy } \alpha}}{\text{przeciwprostokątna}}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{przyprostokątna } \textcolor{teal}{\text{naprzeciw } \alpha}}{\text{przyprostokątna } \textcolor{teal}{\text{przy } \alpha}}$$

$$\text{ctg } \alpha = \frac{\text{przyprostokątna } \textcolor{teal}{\text{przy } \alpha}}{\text{przyprostokątna } \textcolor{teal}{\text{naprzeciw } \alpha}}$$

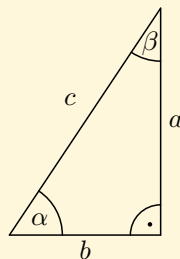
Przykłady:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\text{ctg } \alpha = \frac{b}{a}$$



$$\sin \beta = \frac{b}{c}$$

$$\cos \beta = \frac{a}{c}$$

$$\text{tg } \beta = \frac{b}{a}$$

$$\text{ctg } \beta = \frac{a}{b}$$

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień



Wartości funkcji trygonometrycznych 0° , 30° , 45° , 60° , 90° .



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\operatorname{ctg} \alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0



matma235@o2.pl

Miara kąta na podstawie wartości funkcji trygonometrycznych

Przykład

Dla jakiego kąta α $\sin \alpha = 0,32$?

Uruchamiamy kalkulator w Windows XP

Start → Wszystkie programy → Akcesoria → Kalkulator

w menu: Widok → Naukowy

Wpisujemy 0,32 zaznaczamy ☒ Inv i naciskamy sin

$$\alpha \approx 18,66^\circ$$

W ten sposób wykorzystaliśmy funkcję arcsin, która jest funkcją odwrotną do sin. Na innych kalkulatorach często jest oznaczana jako $\sin^{-1}$.

Podobnie postępujemy z funkcją cos, tg.

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień





spis treści

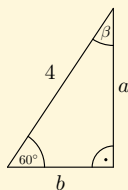
symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



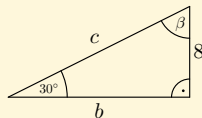
matma235@o2.pl



$$\beta = ?$$

$$a = ?$$

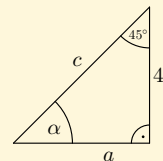
$$b = ?$$



$$\beta = ?$$

$$b = ?$$

$$c = ?$$



$$\alpha = ?$$

$$a = ?$$

$$c = ?$$

▷ W prostokącie przekątna o długości 4 cm tworzy z krótszym bokiem kąt 70° . Oblicz pole prostokąta.

▷ Kij o długości 1,5 m wbity w ziemię rzuca cień na 4 m. Oblicz pod jakim kątem padają promienie słoneczne.

Trygonometria

- Funkcje trygonometryczne w trójkącie prostokątnym
- Wartości funkcji trygonometrycznych 0° , 30° , 45° , 60° , 90°
- Wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta
- Miara kąta na podstawie wartości funkcji trygonometrycznej
- Miara łukowa kąta
- Definicja funkcji trygonometrycznej dowolnego kąta
- Wykres funkcji trygonometrycznej:
 - $y = \sin x$ $y = \cos x$ $y = \operatorname{tg} x$ $y = \operatorname{ctg} x$
- Wzory redukcyjne
- Tożsamości trygonometryczne
- Znaki funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach

- 
- o spisy treści
 - o symbole
 - o zgłoś błąd
 - o 13 kwiecień





spis treści

symbole

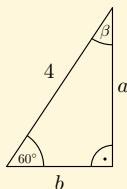
zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

$$\begin{aligned}\beta &=? \\ a &=? \\ b &=?\end{aligned}$$



Rozwiązanie:

suma kątów w trójkącie wynosi 180° .

$$90^\circ + 60^\circ + \beta = 180^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - 150^\circ$$

$$\beta = 30^\circ$$

$$\triangleright \sin 60^\circ = \frac{a}{4}$$

$$\triangleright \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{4} \quad / \cdot 4$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{2} = a$$

$$a = 2\sqrt{3}$$

$$\triangleright \cos 60^\circ = \frac{b}{4}$$

$$\triangleright \frac{1}{2} = \frac{b}{4} \quad / \cdot 4$$

$$\frac{1}{2} \cdot 4 = b$$

$$b = 2$$



spis treści

symbole

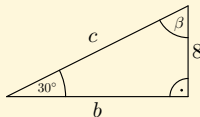
zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

$$\begin{aligned}\beta &=? \\ b &=? \\ c &=?\end{aligned}$$



Rozwiązanie:

suma kątów w trójkącie wynosi 180° .

$$90^\circ + 30^\circ + \beta = 180^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - 120^\circ$$

$$\beta = 60^\circ$$

$$\triangleright \sin 30^\circ = \frac{8}{c}$$

$$\triangleright \frac{1}{2} = \frac{8}{c}$$

mnożymy na krzyż

$$c = 16$$

$$\triangleright \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{8}{b}$$

$$\triangleright \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{8}{b}$$

mnożymy na krzyż

$$\sqrt{3}b = 24 \quad / : \sqrt{3}$$

$$b = \frac{24}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{24\sqrt{3}}{3}$$

$$b = 8\sqrt{3}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

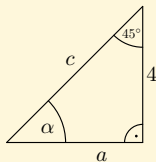


matma235@o2.pl

$$\alpha = ?$$

$$a = ?$$

$$c = ?$$



Rozwiązanie:

suma kątów w trójkącie wynosi 180° .

$$90^\circ + 45^\circ + \alpha = 180^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - 135^\circ$$

$$\alpha = 45^\circ$$

Trójkąt ma dwa kąty po 45° , a więc jest to trójkąt równoramienny $a = 4$.

$$\triangleright \cos 45^\circ = \frac{4}{c}$$

$$\triangleright \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4}{c}$$

mnożymy na krzyż

$$\sqrt{2}c = 8 : \sqrt{2}$$

$$c = \frac{8}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2}$$

$$c = 4\sqrt{2}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

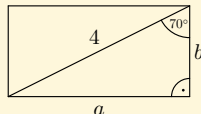
13 kwiecień



matma235@o2.pl

▷ W prostokącie przekątna o długości 4 cm tworzy z krótszym bokiem kąt 70° . Oblicz pole prostokąta.

Rozwiązanie:



$$\triangleright \sin 70^\circ = \frac{a}{4}$$

$$\triangleright 0,94 = \frac{a}{4} \quad / \cdot 4$$

$$0,94 \cdot 4 = a$$

$$a = 3,76$$

$$\triangleright \cos 70^\circ = \frac{b}{4}$$

$$\triangleright 0,34 = \frac{b}{4} \quad / \cdot 4$$

$$0,34 \cdot 4 = b$$

$$b = 1,36$$

$$P = a \cdot b = 3,76 \cdot 1,36 \approx 5,11 \text{ cm}^2$$

Odp. Pole prostokąta wynosi $5,11 \text{ cm}^2$.

Wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta

Dla typowych kątów wartości funkcji trygonometrycznych są [tutaj](#).

Dla dowolnego kąta wartości funkcji trygonometrycznych najłatwiej policzyć na kalkulatorze.

Przykład:

$$\sin 20^\circ$$

Uruchamiamy kalkulator w Windows XP

Start → Wszystkie programy → Akcesoria → Kalkulator

w menu: Widok → Naukowy

Wpisujemy 20 i naciskamy sin





spis treści

symbole

zgłoś błąd

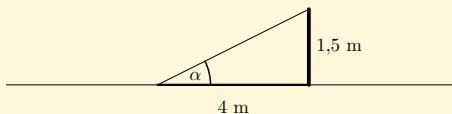
13 kwiecień



matma235@o2.pl

Kij o długości 1,5 m wbity w ziemię rzuca cień na 4 m. Oblicz pod jakim kątem padają promienie słoneczne.

Rozwiązanie:



$$\triangleright \operatorname{tg} \alpha = \frac{1,5}{4}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \approx 0,375$$

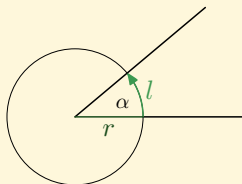
Na kalkulatorze można policzyć:

$$\alpha \approx 20,6^\circ$$

Odp. Promienie słoneczne padają pod kątem $20,6^\circ$.

Miara łukowa kąta

Miarą łukową kąta nazywamy stosunek długości łuku, opartego na tym kącie, do promienia okręgu. Miarę łukową kąta podajemy w radianach.

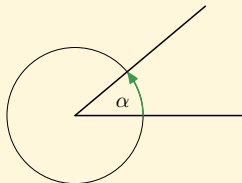


$$\alpha = \frac{l}{r}$$

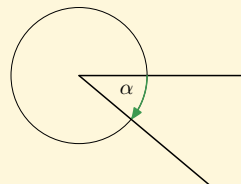
Warto zapamiętać:

$$360^\circ = 2\pi \quad 180^\circ = \pi \quad 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

Znak miary kąta zależy od jego kierunku.



$$\alpha > 0$$



$$\alpha < 0$$



wzory, twierdzenia, definicje

- funkcje trygonometryczne w trójkącie prostokątnym
- wartości funkcji trygonometrycznych 0° , 30° , 45° , 60° , 90°
- miara kąta na podstawie wartości funkcji trygonometrycznej
- miara łukowa kąta
- definicja funkcji trygonometrycznej dowolnego kąta
- wzory redukcyjne
- wartość funkcji trygonometrycznej dowolnego kąta
- wykres funkcji trygonometrycznej: $y = \sin x$ $y = \cos x$ $y = \operatorname{tg} x$ $y = \operatorname{ctg} x$
- znaki funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach
- tożsamości trygonometryczne

przykłady





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Zamień miarę stopniową na łukową

▷ 30°

▷ 135°

▷ 210°

Zamień miarę łukową na stopniową.

▷ $\frac{\pi}{3}$

▷ $\frac{5\pi}{6}$

▷ $1\frac{3}{4}\pi$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

Zamień 30° na miarę łukową.

Rozwiązanie:

Układamy proporcję:

$$\alpha - 30^\circ$$

$$2\pi - 360^\circ$$

$$\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{30^\circ}{360^\circ} \quad / \cdot 2\pi$$

$$\alpha = \frac{1}{12} \cdot 2\pi$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6}$$



matma235@o2.pl

Zamień 135° na miarę łukową.

Rozwiązanie:

Układamy proporcję:

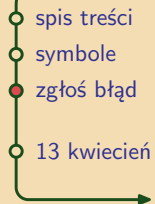
$$\alpha - 135^\circ$$

$$2\pi - 360^\circ$$

$$\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{135^\circ}{360^\circ} \quad / \cdot 2\pi$$

$$\alpha = \frac{3}{8} \cdot 2\pi$$

$$\alpha = \frac{3\pi}{4}$$

- 
- spis treści
 - symbole
 - zgłoś błąd
 - 13 kwiecień



Zamień 210° na miarę łukową.

Rozwiązanie:

Układamy proporcję:

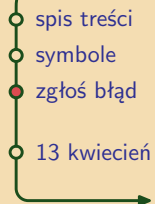
$$\alpha - 210^\circ$$

$$2\pi - 360^\circ$$

$$\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{210^\circ}{360^\circ} \quad / \cdot 2\pi$$

$$\alpha = \frac{7}{12} \cdot 2\pi$$

$$\alpha = \frac{7\pi}{6}$$

- 
- spis treści
 - symbole
 - zgłoś błąd
 - 13 kwiecień





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

Zamień $\frac{\pi}{3}$ na miarę stopniową.

Rozwiązanie:

Wiedząc, że $\pi = 180^\circ$:

$$\frac{\pi}{3} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$



matma235@o2.pl



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Zamień $\frac{5\pi}{6}$ na miarę stopniową.

Rozwiązanie:

Wiedząc, że $\pi = 180^\circ$:

$$\frac{5\pi}{6} = \frac{5 \cdot 180^\circ}{6} = 150^\circ$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Zamień $1\frac{3}{4}\pi$ na miarę stopniową.

Rozwiązanie:

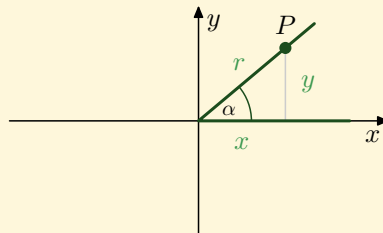
Wiedząc, że $\pi = 180^\circ$:

$$1\frac{3}{4}\pi = \frac{7\pi}{4} = \frac{7 \cdot 180^\circ}{4} = 315^\circ$$

matma235@o2.pl

Definicja funkcji trygonometrycznej dowolnego kąta

Rysujemy kąt α w układzie współrzędnych. Na drugim ramieniu wybieramy punkt $P = (x, y)$ odległy o r od początku układu współrzędnych.



$$\triangleright \sin \alpha = \frac{y}{r} \quad \cos \alpha = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Taka definicja umożliwia obliczanie funkcji trygonometrycznych dla kątów większych od 90° , czego nie da się z tego.





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl



Znajdź wartości podstawowych funkcji trygonometrycznych kąta, którego pierwsze ramię zawiera oś OX , a drugie przechodzi przez punkt P .

▷ $P = (2, 3)$

▷ $P = (-2, -1)$

Znajdź, korzystając z definicji, wartości podstawowych funkcji trygonometrycznych kąta

▷ 135°

▷ 225°

▷ 120°

▷ 330°

Oblicz, korzystając ze wzorów redukcyjnych

▷ $\sin 120^\circ$

▷ $\cos(-135^\circ)$

▷ $\operatorname{tg} 180^\circ$

▷ $\operatorname{ctg}(-240^\circ)$

▷ $\operatorname{tg} 270^\circ$

▷ $\operatorname{ctg}(-300^\circ)$

▷ $\cos 315^\circ$

▷ $\sin(-360^\circ)$

▷ $\operatorname{ctg} 420^\circ$

▷ $\operatorname{tg}(-840^\circ)$

▷ $\sin 1390^\circ$

▷ $\cos(-1485^\circ)$

Oblicz, korzystając ze wzorów redukcyjnych

▷ $\sin \frac{\pi}{3}$

▷ $\cos \frac{3\pi}{4}$

▷ $\operatorname{tg}(-\frac{2\pi}{3})$

▷ $\operatorname{ctg}(-2\pi)$

Oblicz, korzystając ze wzorów redukcyjnych

▷ $\frac{\cos 135^\circ + \operatorname{tg} 330^\circ}{\operatorname{ctg} 225^\circ \sin 840^\circ}$

▷ $\sin \frac{5\pi}{4} \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} + \cos 2\frac{1}{2}\pi$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

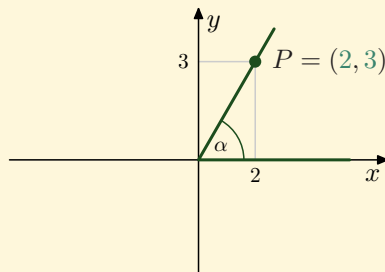
13 kwiecień



matma235@o2.pl

Znajdź wartości podstawowych funkcji trygonometrycznych kąta, którego pierwsze ramię zawiera oś OX , a drugie przechodzi przez punkt $P = (2, 3)$.

Rozwiązanie:



Korzystamy z definicji funkcji trygonometrycznych.

$$x = 2 \quad y = 3$$

$$r = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}} \cdot \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{2}{3}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

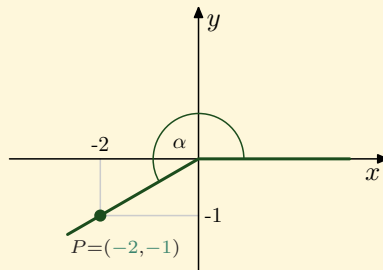
13 kwiecień



matma235@o2.pl

Znajdź wartości podstawowych funkcji trygonometrycznych kąta, którego pierwsze ramię zawiera oś OX , a drugie przechodzi przez punkt $P = (-2, -1)$.

Rozwiązanie:



Korzystamy z **definicji** funkcji trygonometrycznych.

$$x = -2 \quad y = -1$$

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

$$\sin \alpha = \frac{-1}{\sqrt{5}} = \frac{-1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{-\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{-2}{\sqrt{5}} = \frac{-2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{-2\sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{-2}{-1} = 2$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$

α	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\sin \alpha$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	—



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

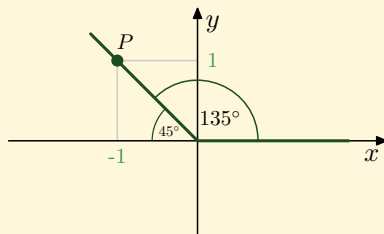


matma235@o2.pl

Znajdź, korzystając z definicji, wartości podstawowych funkcji trygonometrycznych kąta 135° .

Rozwiązanie:

Wybieramy punkt $P = (-1, 1)$ na drugim ramieniu kąta.



Korzystamy z **definicji** funkcji trygonometrycznych.

$$x = -1 \quad y = 1$$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{-1}{1} = -1$$

Wyniki możemy sprawdzić w **tabeli**.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

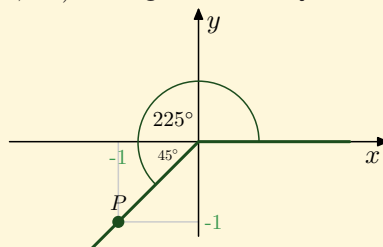


matma235@o2.pl

Znajdź, korzystając z definicji, wartości podstawowych funkcji trygonometrycznych kąta 225° .

Rozwiązanie:

Wybieramy punkt $P = (-1, -1)$ na drugim ramieniu kąta.



Korzystamy z **definicji** funkcji trygonometrycznych.

$$x = -1 \quad y = -1$$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$\cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{-1}{-1} = 1$$

Wyniki możemy sprawdzić w **tabeli**.



spis treści

symbole

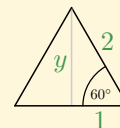
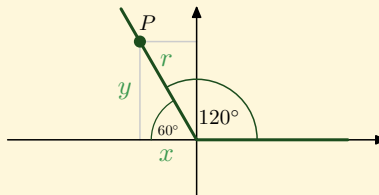
zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Znajdź, korzystając z definicji, wartości podstawowych funkcji trygonometrycznych kąta 120°



Odcinki x , y , r tworzą trójkąt, który jest połową trójkąta równobocznego. Niech P będzie odległe o 2 od początku układu współrzędnych $r = 2$. Patrząc na trójkąt równoboczny widzimy, że $x = 1$. Z twierdzenia Pitagorasa liczymy y .

$$y^2 + 1^2 = 2^2$$

$$y^2 + 1 = 4$$

$$y^2 = 3$$

$$y = \sqrt{3}$$

$$x = 1 \quad y = \sqrt{3} \quad r = 2$$

Korzystamy z **definicji** funkcji trygonometrycznych.

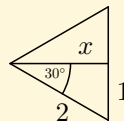
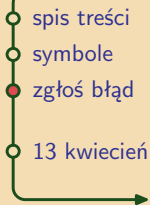
$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Wyniki możemy sprawdzić w **tabeli**.



Odcinki x , y , r tworzą trójkąt, który jest połową trójkąta równobocznego. Niech P będzie odległe o 2 od początku układu współrzędnych $r = 2$. Patrząc na trójkąt równoboczny widzimy, że $y = 1$. Z twierdzenia Pitagorasa liczymy x .

$$x^2 + 1^2 = 2^2$$

$$x^2 + 1 = 4$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \sqrt{3}$$

$$x = \sqrt{3} \qquad y = 1 \qquad r = 2$$

Korzystamy z definicji funkcji trygonometrycznych.

$$\sin \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

Wyniki możemy sprawdzić w tabeli.



spis treści

symbole

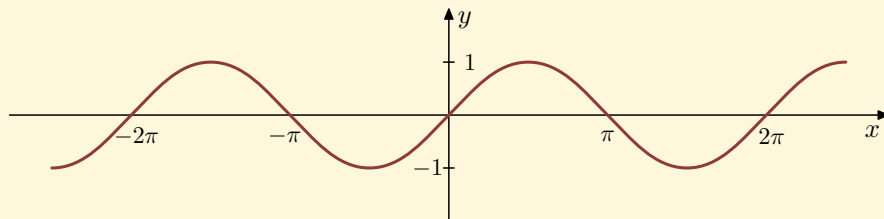
zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

$$y = \sin x$$



dziedzina

zbiór wartości

miejsce zerowe

monotoniczność

różnowartościowość

parzystość

okresowość

$$D = \mathbf{R}$$

$$D^{-1} : y \in \langle -1, 1 \rangle$$

$$x_0 = k\pi \quad k \in \mathbf{C}$$

funkcja jest przedziałami monotoniczna

$$\text{rosnąca dla } x \in \left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle \quad k \in \mathbf{C}$$

$$\text{malejąca dla } x \in \left\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle \quad k \in \mathbf{C}$$

funkcja nie jest różnowartościowa

funkcja nieparzysta

funkcja jest okresowa. Okres podstawowy $T = 2\pi$.



spis treści

symbole

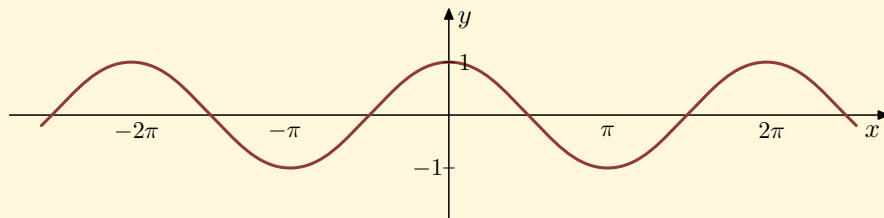
zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

$$y = \cos x$$



dziedzina

zbiór wartości

miejsce zerowe

monotoniczność

różnowartościowość

parzystość

okresowość

$$D = \mathbf{R}$$

$$D^{-1} : y \in \langle -1, 1 \rangle$$

$$x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbf{C}$$

funkcja jest przedziałami monotoniczna

malejąca dla $x \in \langle 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle \quad k \in \mathbf{C}$

rosnąca dla $x \in \langle \pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi \rangle \quad k \in \mathbf{C}$

funkcja nie jest różnowartościowa

funkcja parzysta

funkcja jest okresowa. Okres podstawowy $T = 2\pi$.



spis treści

symbole

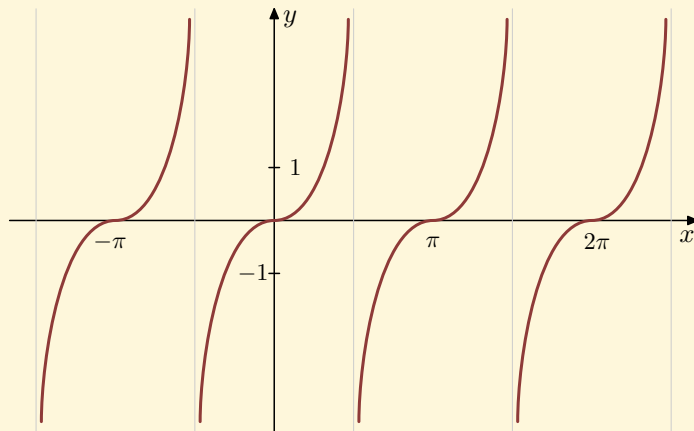
zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

$$y = \operatorname{tg} x$$



dziedzina

zbiór wartości

miejsce zerowe

monotoniczność

różnowartościowość

parzystość

okresowość

$$D = \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \quad k \in \mathbf{C}$$

$$D^{-1} : y \in \mathbf{R}$$

$$x_0 = k\pi \quad k \in \mathbf{C}$$

funkcja jest przedziałami monotoniczna

rosnąca dla $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right) \quad k \in \mathbf{C}$

funkcja nie jest różnowartościowa

funkcja nieparzysta

funkcja jest okresowa. Okres podstawowy $T = \pi$.



spis treści

symbole

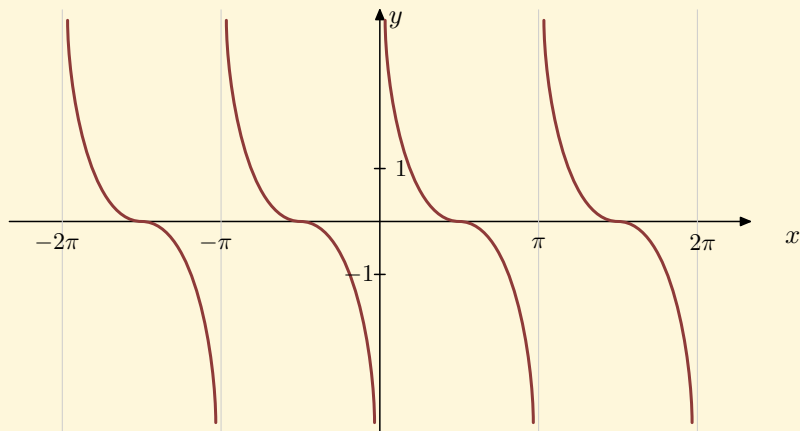
zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

$$y = \operatorname{ctg} x$$



dziedzina
zbiór wartości
miejsce zerowe
monotoniczność

różnowartościowość
parzystość
okresowość

$$D = \mathbf{R} \setminus \{k\pi\} \quad k \in \mathbf{C}$$

$$D^{-1} : y \in \mathbf{R}$$

$$x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbf{C}$$

funkcja jest przedziałami monotoniczna

malejąca dla $x \in \langle k\pi, \pi + k\pi \rangle \quad k \in \mathbf{C}$

funkcja nie jest różnowartościowa

funkcja nieparzysta

funkcja jest okresowa. Okres podstawowy $T = \pi$.

Wzory redukcyjne

$$\begin{aligned}\sin(k \cdot 360^\circ + \alpha) &= \sin \alpha & \operatorname{tg}(k \cdot 180^\circ + \alpha) &= \operatorname{tg} \alpha \\ \cos(k \cdot 360^\circ + \alpha) &= \cos \alpha & \operatorname{ctg}(k \cdot 180^\circ + \alpha) &= \operatorname{ctg} \alpha\end{aligned}$$

k - dowolna liczba całkowita

$$\begin{aligned}\sin(-\alpha) &= -\sin \alpha & \operatorname{tg}(-\alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos \alpha & \operatorname{ctg}(-\alpha) &= -\operatorname{ctg} \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(90^\circ + \alpha) &= \cos \alpha & \sin(180^\circ + \alpha) &= -\sin \alpha & \sin(270^\circ + \alpha) &= -\cos \alpha \\ \cos(90^\circ + \alpha) &= -\sin \alpha & \cos(180^\circ + \alpha) &= -\cos \alpha & \cos(270^\circ + \alpha) &= \sin \alpha \\ \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) &= -\operatorname{ctg} \alpha & \operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) &= \operatorname{tg} \alpha & \operatorname{tg}(270^\circ + \alpha) &= -\operatorname{ctg} \alpha \\ \operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha & \operatorname{ctg}(180^\circ + \alpha) &= \operatorname{ctg} \alpha & \operatorname{ctg}(270^\circ + \alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(90^\circ - \alpha) &= \cos \alpha & \sin(180^\circ - \alpha) &= \sin \alpha & \sin(270^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \cos(90^\circ - \alpha) &= \sin \alpha & \cos(180^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha & \cos(270^\circ - \alpha) &= -\sin \alpha \\ \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) &= \operatorname{ctg} \alpha & \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha & \operatorname{tg}(270^\circ - \alpha) &= \operatorname{ctg} \alpha \\ \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) &= \operatorname{tg} \alpha & \operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) &= -\operatorname{ctg} \alpha & \operatorname{ctg}(270^\circ - \alpha) &= \operatorname{tg} \alpha\end{aligned}$$

Minimalny zestaw wzorów redukcyjnych



Minimalny zestaw wzorów redukcyjnych

Nie **wszystkie** wzory są potrzebne, aby rozwiązać każde zadanie. Poniższe wzory wystarczą do znalezienia funkcji trygonometrycznej każdego kąta. Tylko te wzory będą wykorzystywał w zadaniach.

$$\sin(k \cdot 360^\circ + \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(k \cdot 360^\circ + \alpha) = \cos \alpha$$

k - dowolna liczba całkowita

$$\operatorname{tg}(k \cdot 180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(k \cdot 180^\circ + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

$$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$$

Wszystkie wzory redukcyjne





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

Oblicz, korzystając ze wzorów redukcyjnych $\sin 120^\circ$.

Rozwiązanie:

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) \stackrel{\triangleright}{=} \sin 60^\circ \stackrel{\triangleright}{=} \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Wynik możemy sprawdzić w [tabeli](#).



matma235@o2.pl



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz, korzystając ze wzorów redukcyjnych $\cos(-135^\circ)$.

Rozwiązanie:

$$\cos(-135^\circ) \stackrel{\triangleright}{=} \cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) \stackrel{\triangleright}{=} -\cos 45^\circ \stackrel{\triangleright}{=} -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz, korzystając ze wzorów redukcyjnych $\operatorname{tg} 180^\circ$.

Rozwiązanie:

$$\operatorname{tg} 180^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ + 0^\circ) \stackrel{\triangleright}{=} \operatorname{tg} 0^\circ \stackrel{\triangleright}{=} 0$$

Wynik możemy sprawdzić w [tabeli](#).



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

Oblicz, korzystając ze wzorów redukcyjnych $\operatorname{ctg}(-240^\circ)$.

Rozwiązanie:

$$\operatorname{ctg}(-240^\circ) \stackrel{\triangleright}{=} -\operatorname{ctg} 240^\circ = -\operatorname{ctg}(180^\circ + 60^\circ) \stackrel{\triangleright}{=} -\operatorname{ctg} 60^\circ \stackrel{\triangleright}{=} -\frac{\sqrt{3}}{3}$$



matma235@o2.pl



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz, korzystając ze wzorów redukcyjnych $\operatorname{tg} 270^\circ$.

Rozwiązanie:

$$\operatorname{tg} 270^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ + 90^\circ) \stackrel{\triangleright}{=} \operatorname{tg} 90^\circ \stackrel{\triangleright}{=} -$$

Nie ma rozwiązania.

Wynik możemy sprawdzić w [tabeli](#).



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz, korzystając ze wzorów redukcyjnych $\operatorname{ctg}(-300^\circ)$.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg}(-300^\circ) &\stackrel{\triangleright}{=} -\operatorname{ctg} 300^\circ = -\operatorname{ctg}(180^\circ + 120^\circ) \stackrel{\triangleright}{=} -\operatorname{ctg} 120^\circ = \\ &= -\operatorname{ctg}(180^\circ - 60^\circ) = -(-\operatorname{ctg} 60^\circ) = \operatorname{ctg} 60^\circ \stackrel{\triangleright}{=} \frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz, korzystając ze wzorów redukcyjnych $\cos 315^\circ$.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}\cos 315^\circ &= \cos(180^\circ + 135^\circ) \stackrel{\triangleright}{=} -\cos 135^\circ = -\cos(180^\circ - 45^\circ) = \\ &= -(-\cos 45^\circ) \stackrel{\triangleright}{=} \cos 45^\circ \stackrel{\triangleright}{=} \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

Wynik możemy sprawdzić w tabeli.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

Oblicz, korzystając ze wzorów redukcyjnych $\sin(-360^\circ)$.

Rozwiązanie:

$$\sin(-360^\circ) \stackrel{!}{=} -\sin 360^\circ = -\sin(360^\circ + 0^\circ) \stackrel{!}{=} -\sin 0^\circ = 0$$



matma235@o2.pl



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz, korzystając ze wzorów redukcyjnych $\operatorname{ctg} 420^\circ$.

Rozwiązanie:

$$\operatorname{ctg} 420^\circ = \operatorname{ctg}(2 \cdot 180^\circ + 60^\circ) \stackrel{\triangle}{=} \operatorname{ctg} 60^\circ \stackrel{\triangle}{=} \frac{\sqrt{3}}{3}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwietnia

Oblicz, korzystając ze wzorów redukcyjnych $\operatorname{tg}(-840^\circ)$.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(-840^\circ) &\stackrel{\triangleright}{=} -\operatorname{tg} 840^\circ = -\operatorname{tg}(4 \cdot 180^\circ + 120^\circ) \stackrel{\triangleright}{=} -\operatorname{tg} 120^\circ = -\operatorname{tg}(180^\circ - 60^\circ) = \\ &= -(-\operatorname{tg} 60^\circ) = \operatorname{tg} 60^\circ \stackrel{\triangleright}{=} \sqrt{3}\end{aligned}$$



matma235@o2.pl



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz, korzystając ze wzorów redukcyjnych $\sin 1380^\circ$.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}\sin 1380^\circ &= \sin(3 \cdot 360^\circ + 300^\circ) \stackrel{\triangleright}{=} \sin 300^\circ = \sin(180^\circ + 120^\circ) = \\ &\stackrel{\triangleright}{=} -\sin(180^\circ - 60^\circ) \stackrel{\triangleright}{=} \sin 60^\circ \stackrel{\triangleright}{=} \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz, korzystając ze wzorów redukcyjnych $\cos(-1485^\circ)$.

Rozwiązanie:

$$\cos(-1485^\circ) \stackrel{\triangleright}{=} \cos 1485^\circ = \cos(4 \cdot 360^\circ + 45^\circ) \stackrel{\triangleright}{=} \cos 45^\circ \stackrel{\triangleright}{=} \frac{\sqrt{2}}{2}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz, korzystając ze wzorów redukcyjnych $\sin \frac{\pi}{3}$.

Rozwiązanie:

Wiedząc, że $\pi = 180^\circ$:

$$\frac{\pi}{3} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz, korzystając ze wzorów redukcyjnych $\sin \frac{3\pi}{4}$.

Rozwiązanie:

Wiedząc, że $\pi = 180^\circ$:

$$\frac{3\pi}{4} = \frac{3 \cdot 180^\circ}{4} = 135^\circ$$

$$\sin \frac{3\pi}{4} = \sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) \stackrel{\triangleright}{=} \sin 45^\circ \stackrel{\triangleright}{=} \frac{\sqrt{2}}{2}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz, korzystając ze wzorów redukcyjnych $\operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

Rozwiązanie:

Wiedząc, że $\pi = 180^\circ$:

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{2 \cdot 180^\circ}{3} = 120^\circ$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) &= \operatorname{tg}(-120^\circ) \stackrel{\triangleright}{=} -\operatorname{tg} 120^\circ = -\operatorname{tg}(180^\circ - 60^\circ) \stackrel{\triangleright}{=} -(-\operatorname{tg} 60^\circ) = \\ &= \operatorname{tg} 60^\circ \stackrel{\triangleright}{=} \sqrt{3}\end{aligned}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz, korzystając ze wzorów redukcyjnych $\operatorname{ctg}(-2\pi)$.

Rozwiązanie:

Wiedząc, że $\pi = 180^\circ$:

$$2\pi = 2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$$

$$\operatorname{ctg}(-2\pi) = \operatorname{ctg}(-360^\circ) \stackrel{\triangleright}{=} -\operatorname{ctg} 360^\circ = -\operatorname{ctg}(2 \cdot 180^\circ + 0^\circ) = -\operatorname{ctg} 0^\circ = -$$

Nie ma rozwiązania.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Oblicz, korzystając ze wzorów redukcyjnych

$$\frac{\cos 135^\circ + \operatorname{tg} 330^\circ}{\operatorname{ctg} 225^\circ \sin 840^\circ}$$

Rozwiązanie:

$$\cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) \stackrel{\triangleright}{=} -\cos 45^\circ \stackrel{\triangleright}{=} -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 330^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ + 150^\circ) \stackrel{\triangleright}{=} \operatorname{tg} 150^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 30^\circ) \stackrel{\triangleright}{=} \operatorname{tg} 30^\circ \stackrel{\triangleright}{=} \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{ctg} 225^\circ = \operatorname{ctg}(180^\circ + 45^\circ) \stackrel{\triangleright}{=} \operatorname{ctg} 45^\circ \stackrel{\triangleright}{=} 1$$

$$\sin 840^\circ = \sin(2 \cdot 360^\circ + 120^\circ) \stackrel{\triangleright}{=} \sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) \stackrel{\triangleright}{=} \sin 60^\circ \stackrel{\triangleright}{=} \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\cos 135^\circ + \operatorname{tg} 330^\circ}{\operatorname{ctg} 225^\circ \sin 840^\circ} &= \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-\frac{3\sqrt{2}}{6} + \frac{2\sqrt{3}}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-\frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \\ &= \frac{-3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{6} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{-6\sqrt{2} + 4\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \\ &= \frac{-12\sqrt{6} + 12}{18} = \frac{6(-2\sqrt{6} + 2)}{6 \cdot 3} = \frac{-2\sqrt{6} + 2}{3} \end{aligned}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz, korzystając ze wzorów redukcyjnych

$$\sin \frac{5\pi}{4} \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} + \cos 2\frac{1}{2}\pi$$

Rozwiązanie:

Wiedząc, że $\pi = 180^\circ$:

$$\sin \frac{5\pi}{4} = \sin \frac{5 \cdot 180^\circ}{4} = \sin 225^\circ$$

$$\sin 225^\circ = \sin(180^\circ + 45^\circ) \stackrel{\triangleright}{=} -\sin 45^\circ \stackrel{\triangleright}{=} -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} = \operatorname{tg} \frac{4 \cdot 180^\circ}{3} = \operatorname{tg} 240^\circ$$

$$\operatorname{tg} 240^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ + 60^\circ) \stackrel{\triangleright}{=} \operatorname{tg} 60^\circ \stackrel{\triangleright}{=} \sqrt{3}$$

$$\cos 2\frac{1}{2}\pi = \cos(2\frac{1}{2} \cdot 180^\circ) = \cos(\frac{5}{2} \cdot 180^\circ) = \cos 450^\circ$$

$$\cos 450^\circ = \cos(360^\circ + 90^\circ) \stackrel{\triangleright}{=} \cos 90^\circ \stackrel{\triangleright}{=} 0$$

$$\sin \frac{5\pi}{4} \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} + \cos 2\frac{1}{2}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} + 0 = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Tożsamości trygonometryczne

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Znaki funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach

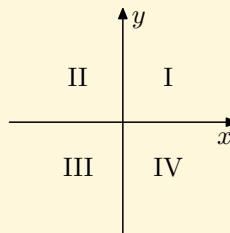
- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień

ćwiartka	I	II	III	IV
$\alpha \in$	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	$(\pi, \frac{3}{2}\pi)$	$(\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$
$\sin \alpha$	+	+	−	−
$\cos \alpha$	+	−	−	+
$\operatorname{tg} \alpha$	+	−	+	−
$\operatorname{ctg} \alpha$	+	−	+	−

Znaki funkcji trygonometrycznych widać także na wykresach:

$$y = \sin x \quad y = \cos x \quad y = \operatorname{tg} x \quad y = \operatorname{ctg} x$$

ćwiartki w układzie współrzędnych





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α , jeżeli:

▷ $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ gdy $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

▷ $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ gdy $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$

▷ $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{5}$ gdy $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$

▷ $\operatorname{ctg} \alpha = 2$ gdy $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$

Wykaż tożsamość:

▷ $(\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1) \sin^2 \alpha = 1$

▷ $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2$





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α , jeżeli:

$$\sin \alpha = \frac{1}{3} \quad \text{gd}y \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$

Rozwiązanie:

$$\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\triangleright \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{3} : \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\triangleright \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1 : \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = 1 : \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = 1 \cdot \left(-\frac{4}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{4}{\sqrt{2}} = -\frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{4\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}$$

$$\text{Odp. } \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \operatorname{tg} = -\frac{\sqrt{2}}{4}, \quad \operatorname{ctg} = -2\sqrt{2}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$\triangleright \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\frac{1}{9} + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{8}{9}$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{\frac{8}{9}} \quad \text{lub} \quad \cos \alpha = \sqrt{\frac{8}{9}}$$

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ czyli $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ co oznacza, że $\cos \alpha < 0$

$$\cos \alpha = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{\sqrt{8}}{3} = -\frac{\sqrt{4 \cdot 2}}{3} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α , jeżeli:

$$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{gdy } \pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$$

Rozwiązanie:

$$\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\triangleright \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

$$\triangleright \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$1 \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\text{Odp. } \sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} = 1, \quad \operatorname{ctg} = 1$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$\triangleright \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \frac{2}{4} = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \frac{1}{2} = 1$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\sin \alpha = -\sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{lub} \quad \sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ czyli $\alpha \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$ co oznacza, że $\sin \alpha < 0$

$$\sin \alpha = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α , jeżeli:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{5} \quad \text{gd}y \quad \frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$$

Rozwiązanie:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{5}$$

$$\triangleright \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\sqrt{5} / \cdot \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = -\sqrt{5} \cos \alpha$$

$$\triangleright \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$(-\sqrt{5} \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$5 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$6 \cos^2 \alpha = 1 / : 6$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{6}} \quad \text{lub} \quad \cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{6}}$$

$\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$ czyli $\alpha \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$ co oznacza, że $\cos \alpha > 0$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\sin \alpha = -\sqrt{5} \cos \alpha = -\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{6}}{6} = -\frac{\sqrt{30}}{6}$$

$$\triangleright \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$-\sqrt{5} \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1 / : \sqrt{5}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Odp. } \sin \alpha = -\frac{\sqrt{30}}{6}, \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{6}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α , jeżeli:

$$\operatorname{ctg} \alpha = 2 \quad \text{gd}y \quad 0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$$

Rozwiązanie:

$$\operatorname{ctg} \alpha = 2$$

$$\triangleright \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2 / \cdot \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = 2 \sin \alpha$$

$$\triangleright \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha + (2 \sin \alpha)^2 = 1$$

$$\sin^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha = 1$$

$$5 \sin^2 \alpha = 1 / : 5$$

$$\sin \alpha = -\sqrt{\frac{1}{5}} \quad \text{lub} \quad \sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{5}}$$

$0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ czyli $\alpha \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ co oznacza, że $\sin \alpha > 0$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos \alpha = 2 \sin \alpha = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\triangleright \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot 2 = 1 / : 2$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\text{Odp. } \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad \cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad \operatorname{tg} = \frac{1}{2}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Wykaż tożsamość:

$$(\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1) \sin^2 \alpha = 1$$

Rozwiązanie:

Zazwyczaj tożsamości udowadniamy wychodząc od strony bardziej „skomplikowanej” i przez kolejne przekształcenia dochodząc do strony „prostszej”.

$$L = (\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1) \sin^2 \alpha \stackrel{\triangleright}{=} \left(\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + 1 \right) \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \stackrel{\triangleright}{=} 1$$

$$L=P$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Wykaż tożsamość:

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2$$

Rozwiązanie:

Zazwyczaj tożsamości udowadniamy wychodząc od strony bardziej „skomplikowanej” i przez kolejne przekształcenia dochodząc do strony „prostszej”.

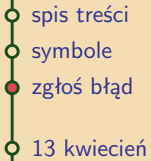
$$\begin{aligned} L &= (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \\ &\stackrel{\triangleright}{=} \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = \\ &\stackrel{\triangleright}{=} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \\ &\stackrel{\triangleright}{=} 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

$$L=P$$

wzory, twierdzenia, definicje

- okrąg i koło
- trójkąt
- twierdzenie Pitagorasa
- twierdzenie cosinusów
- twierdzenie sinusów
- twierdzenie Talesa
- przystawanie wielokątów
- podobieństwo wielokątów

przykłady

- 
- o spisy treści
 - o symbole
 - zgłoś błąd
 - o 13 kwiecień





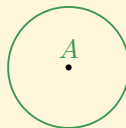
spis treści

symbole

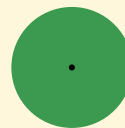
zgłoś błąd

13 kwiecień

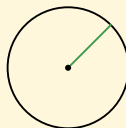
Okrąg i koło



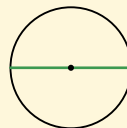
okrąg o środku A



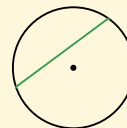
koło o środku A



promień



średnica



cięciwa





spis treści

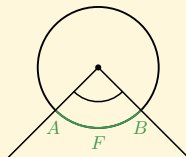
symbole

zgłoś błąd

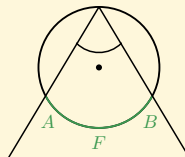
13 kwiecień



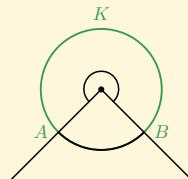
Kąty w okręgu



kąt **środkowy** oparty
na łuku **AFB**



kąt **wpisany** oparty
na łuku **AFB**



kąt **środkowy** oparty
na łuku **AKB**

Kąt środkowy ma wierzchołek w środku okręgu.

Kąt wpisany ma wierzchołek na okręgu.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

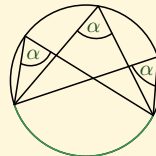
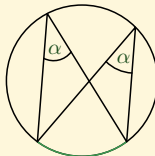
13 kwiecień



Twierdzenie o kątach wpisanych

Kąty wpisane oparte na tym samym łuku są równe.

Przykłady:





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

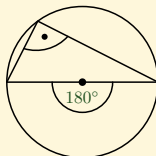
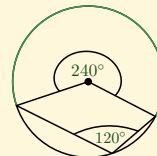
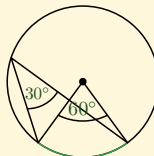
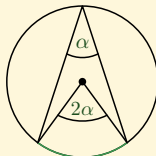


matma235@o2.pl

Twierdzenie o kącie wpisanym i środkowym

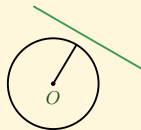
Kąt **środkowy** jest dwa razy większy od kąta **wpisanego** opartego na tym samym łuku co kąt środkowy.

Przykłady:

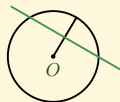


Kąt wpisany oparty na średnicy ma 90° .

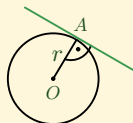
Wzajemne położenie prostej i okręgu



prosta jest **zewnętrzną** okręgu



prosta jest **sieczną** okręgu



prosta jest **styczną** okręgu

A – punkt styczności. Jedyny punkt wspólny prostej i okręgu.
Odległość stycznej od środka okręgu O jest równa promieniowi okręgu r .
Kąt między promieniem okręgu a styczną jest prosty.

dwie styczne do okręgu

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień





spis treści

symbole

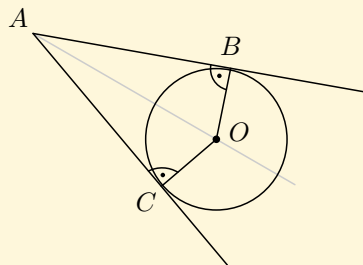
zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Dwie styczne do okręgu



Odcinki AB i AC są równe

$$|AB| = |AC|$$

Półprosta AO jest dwusieczną kąta CAB .



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Czytasz zadanie i nic. Zero. Pustka w głowie. Nie wiesz jak je ugryźć. Możesz wtedy sięgnąć do mojego ebook'a. A jeżeli to jest w szkole? Komputer daleko. Wtedy możesz sięgnąć to tych tablic.



- ★ Przejrzysty układ.
- ★ Kolorowe wykresy i rysunki.
- ★ Bez nadmiaru materiału, tylko to co potrzebujesz.

[spis treści](#)

[recenzje](#)

Zadania są prostsze gdy znasz teorię!

Kliknij by kupić w księgarni internetowej.



spis treści
symbole
zgłosz błęd
13 kwiecień



Spis treści

1. Podstawowe symbole i oznaczenia
2. Alfabet grecki
3. Liczby arabskie i rzymskie
4. Podwielokrotności i wielokrotności miar
5. Liczby
6. Logika matematyczna
7. Zbiory
8. Działania na liczbach i wyrażeniach
9. Funkcja i jej własności
10. Granica funkcji
11. Pochodna funkcji
12. Ekstremum funkcji
13. Styczna i asymptota wykresu funkcji
14. Punkt przegięcia wykresu funkcji
15. Przebieg zmienności funkcji
16. Przekształcenie wykresu funkcji
17. Całka nieoznaczona
18. Całka oznaczona
19. Ciągi
20. Równanie i nierówności z jedną niewiadomą
21. Funkcja liniowa
22. Funkcja kwadratowa
23. Wielomiany
24. Równania drugiego stopnia z dwiema niewiadomymi
25. Układy równań z dwiema niewiadomymi
26. Układ dwóch równań drugiego stopnia z dwiema niewiadomymi
27. Nierówności drugiego stopnia z dwiema niewiadomymi
28. Funkcja wymierna

29. Funkcja potęgowa
30. Funkcja wykładnicza
31. Funkcja logarytmiczna
32. Funkcje trygonometryczne
33. Funkcje cyklometryczne (kołowe)
34. Podstawowe pojęcia geometrii
35. Współrzędne punktu, odległość. Wektor
36. Prosta
37. Półprosta, odcinek
38. Łamana
39. Płaszczyzna
40. Prosta płaszczyzny
41. Kąt
42. Okrąg, koło
43. Elipsa, hiperbola, parabola
44. Wielokąt
45. Trójkąt
46. Czworokąt
47. Przekształcenia geometryczne płaszczyzny
48. Wielościan
49. Bryły obrotowe
50. Kombinatoryka
51. Doświadczenie losowe
52. Zdarzenia losowe
53. Prawdopodobieństwo
54. Zmienna losowa
55. Statystyka

Tabele

- Zamiana stopni na radiany i odwrotnie
- Wartości sinusów i cosinusów
- Wartości tangensów i cotangensów
- Kwadraty, pierwiastki liczb
- Kwadraty, sześciany i pierwiastki liczb
- Jednostki długości, powierzchni, objętości, masy i czasu

“Uważamy, że Tablice Matematyczne są nowatorską i w pełni profesjonalną propozycją, która zostanie życzliwie przyjęta przez uczniów i nauczycieli...”

mgr Elżbieta Bańkowska

mgr Dorota Stankiewicz

(IV LO w Gdyni)

“... Trafny dobór materiału, przejrzysty układ, klarowność tekstu, wyśmienita szata graficzna, jak i inne walory sprawiają, że TABLICE są bardzo przydatne w nauczaniu matematyki w zakresie szkoły średniej...”

prof.dr. hab. Tadeusz Stanisław

(Akademia Ekonomiczna w Krakowie)

“... Uważam, że książka jest poważną propozycją w znakomity sposób uzupełniającą podręcznik do nauki matematyki...”

dr. Leon Gulowski

(Uniwersytet Gdański)

“... Treść zawarta w omawianej książce jest poprawna merytorycznie, a sposób jej podania czyni tą książkę wartościową pod względem dydaktycznym...”

dr. Jerzy Bednarczuk

(Uniwersytet Warszawski)



wzory, twierdzenia, definicje
1logika



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl



Narysuj wykres funkcji i wypisz jej własności:

$$\triangleright y = \frac{1}{x}$$

$$\triangleright y = \frac{-2}{x}$$

$$\triangleright y = \frac{1}{x} + 1$$

$$\triangleright y = \frac{1}{x-2}$$

$$\triangleright y = \frac{2}{x+3} - 1$$

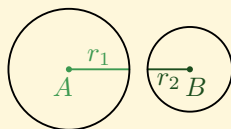
$$\triangleright y = \frac{x+3}{x+2}$$

$$\triangleright y = \frac{2x-3}{x-1}$$

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień

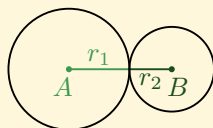


wzajemne położenie dwóch okręgów



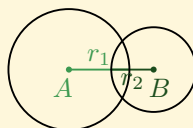
okręgi wzajemnie zewnętrzne

$$|AB| > r_1 + r_2$$



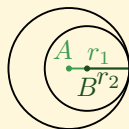
okręgi styczne zewnętrznie

$$|AB| = r_1 + r_2$$



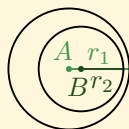
okręgi przecinające się

$$|r_1 - r_2| < |AB| < r_1 + r_2$$



okręgi styczne wewnętrznie

$$|AB| = |r_1 - r_2|$$



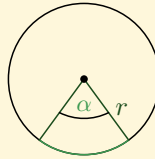
okręgi nie są styczne
i większy zawiera mniejszy

$$|AB| < |r_1 - r_2|$$

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień

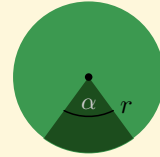


Łuk okręgu, wycinek i odcinek koła



$$l = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

długość łuku



$$P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

pole wycinka

$$\pi \approx 3,14$$



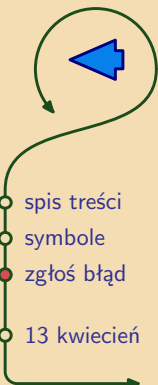
odcinek koła

pole odcinka = pole wycinka — pole trójkąta



matma235@o2.pl

Długość okręgu i pole koła

- 
- spis treści
 - symbole
 - zgłoś błąd
 - 13 kwiecień

$$l = 2\pi r$$

$$P = \pi r^2$$

$$\pi \approx 3,14$$



matma235@o2.pl



spis treści

symbole

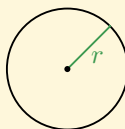
zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Długość okręgu i pole koła



$$l = 2\pi r$$



$$P = \pi r^2$$

$$\pi \approx 3,14$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

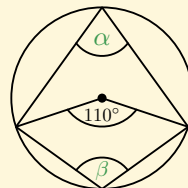
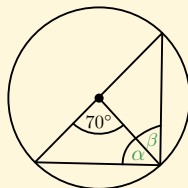
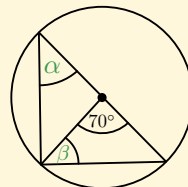
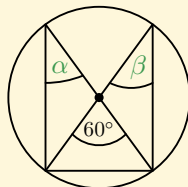
13 kwiecień



matma235@o2.pl



Znajdź miary kątów α i β .





spis treści

symbole

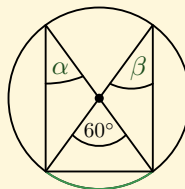
zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Znajdź miary kątów α i β .



Kąty wpisane α i β oparte są na tym samym łuku, dlatego są równe.

$$\alpha = \beta$$

Kąt wpisany α jest oparty na tym samym łuku co kąt środkowy 60° , dlatego jest dwa razy mniejszy.

$$\alpha = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

Odp. $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 30^\circ$.



spis treści

symbole

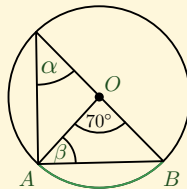
zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

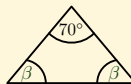
Znajdź miary kątów α i β .



Kąt wpisany α jest oparty na tym samym łuku co kąt środkowy 70° , dlatego jest dwa razy mniejszy.

$$\alpha = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ$$

Trójkąt AOB jest równoramienny ($|OA| = |OB|$, bo to są promienie okręgu). W trójkącie równoramiennym kąty przy podstawie są równe.



Suma kątów w trójkącie jest równa 180° .

$$\beta + \beta + 70^\circ = 180^\circ$$

$$2\beta = 180^\circ - 70^\circ$$

$$\beta = 55^\circ$$

Odp. $\alpha = 35^\circ$, $\beta = 55^\circ$.

Okrąg i koło

- okrąg, koło, promień, średnica, cięciwa
- kąty w okręgu
- twierdzenie o kątach wpisanych
- twierdzenie o kącie wpisanym i środkowym
- okrąg opisany na trójkącie
- okrąg wpisany w trójkąt
- wzajemne położenie prostej i okręgu
- wzajemne położenie dwóch okręgów
- długość okręgu i pole koła
- łuk okręgu, wycinek i odcinek koła

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień



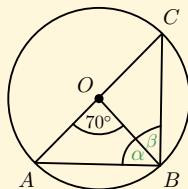


spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Trójkąt AOB jest równoramienny ($|OA| = |OB|$, bo to są promienie okręgu). W trójkącie równoramiennym kąty przy podstawie są równe.

$$\alpha + \alpha + 70^\circ = 180^\circ$$

$$2\alpha = 180^\circ - 70^\circ$$

$$\alpha = 55^\circ$$

Trójkąt ABC jest oparty na średnicy AC dlatego kąt $ABC = 90^\circ$.

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$55^\circ + \beta = 90^\circ$$

$$\beta = 90^\circ - 55^\circ$$

$$\beta = 35^\circ$$

Odp. $\alpha = 55^\circ$, $\beta = 35^\circ$.



spis treści

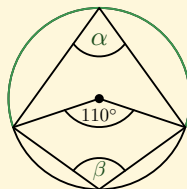
symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

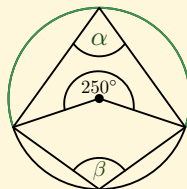


matma235@o2.pl



Kąt **wpisany** α jest oparty na tym samym **łuku** co kąt **środkowy** 110° , **dlatego** jest dwa razy mniejszy.

$$\alpha = \frac{110^\circ}{2} = 55^\circ$$



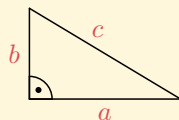
$$250^\circ + 110^\circ = 360^\circ$$

Kąt **wpisany** β jest oparty na tym samym **łuku** co kąt **środkowy** 250° , **dlatego** jest dwa razy mniejszy.

$$\alpha = \frac{250^\circ}{2} = 125^\circ$$

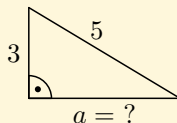
Twierdzenie Pitagorasa

W każdym trójkącie prostokątnym:

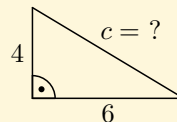


$$a^2 + b^2 = c^2$$

Przykłady:



$$\begin{aligned}a^2 + 3^2 &= 5^2 \\a^2 &= 25 - 9 \\a &= \sqrt{16} = 4\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}6^2 + 4^2 &= c^2 \\c^2 &= 36 + 16 \\c &= \sqrt{52} = \sqrt{4 \cdot 13} = 2\sqrt{13}\end{aligned}$$





▷ Przez punkt A poprowadzono styczną do okręgu o promieniu 3cm . Odległość punktu A od środka okręgu wynosi 5cm . Znajdź odległość punktu A od punktu styczności.





spis treści

symbole

zgłoś błąd

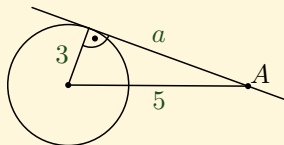
13 kwiecień



matma235@o2.pl

Przez punkt A poprowadzono styczną do okręgu o promieniu 3 cm. Odległość punktu A od środka okręgu wynosi 5 cm. Znajdź odległość punktu A od punktu styczności.

Rozwiązanie:



Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa:

$$a^2 + 3^2 = 5^2$$

$$a^2 = 25 - 9$$

$$a^2 = 16$$

$$a = \sqrt{16} = 4$$

Odp. Punkt A odległy jest od punktu styczności o 4 cm.



▷ Okrąg o promieniu 4 cm jest styczny zewnętrznie do okręgu o promieniu 2 cm. Poprowadzono prostą styczną do tych okręgów. Oblicz odległości między punktami styczności.

spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

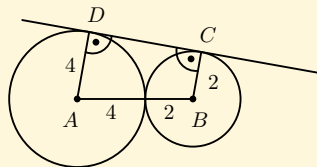


matma235@o2.pl

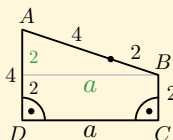
Okrąg o promieniu 4 cm jest **styczny zewnętrznie** do okręgu o promieniu 2 cm. Poprowadzono prostą styczną do tych okręgów. Oblicz odległości między punktami styczności.

Rozwiązanie:

Kąty między promieniami okręgu a prostą **styczną** mają po 90° .



Czworokąt $ABCD$ narysujemy odwrócony, aby łatwiej zobaczyć rozwiązanie.



$$AB = 6$$

Z twierdzenia Pitagorasa:

$$a^2 + 2^2 = 6^2$$

$$a^2 = 36 - 4$$

$$a^2 = 32$$

$$a = \sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$$

Odp. Odległość między punktami styczności wynosi $4\sqrt{2}$ cm.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

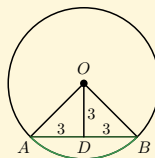
13 kwiecień



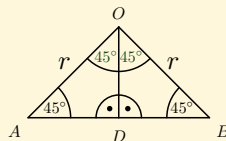
matma235@o2.pl

W okręgu poprowadzono cięciwę o długości 6 cm odległą o 3 cm od środka okręgu. Oblicz długość łuków okręgu, na które dzieli ten okrąg cięciwa.

Rozwiązanie:



Cięciwa AB o długości 6 cm jest podzielona przez punkt D na dwie równe części o długości 3 cm. Zatem trójkąty ADO i BDO są trójkątami równoramiennymi z następującymi kątami.



Kąty przy podstawie trójkąta równoramiennego są równe.

Z twierdzenia Pitagorasa $r = 3\sqrt{2}$

Kąt między promieniami r okręgu wynosi zatem $45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$.

Korzystając ze wzoru liczymy długość łuku.

$$l_1 = \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 3\sqrt{2} = \frac{1}{4} \cdot 6\sqrt{2}\pi = 1\frac{1}{2}\sqrt{2}\pi \text{ cm}$$

Długość drugiego łuku otrzymamy odejmując l_1 od długości okręgu.

$$l_2 = 2\pi \cdot 3\sqrt{2} - 1\frac{1}{2}\sqrt{2}\pi = 6\sqrt{2}\pi - 1\frac{1}{2}\sqrt{2}\pi = 4\frac{1}{2}\pi \text{ cm}$$

Odp. Okrąg został podzielony na łuki o długościach $1\frac{1}{2}\pi$ cm i $4\frac{1}{2}\pi$ cm.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

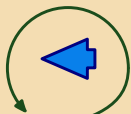
13 kwietnia



matma235@o2.pl



- ▷ W okręgu poprowadzono cięciwę o długości 6 cm odległą o 3 cm od środka okręgu. Oblicz długość łuków okręgu, na które dzieli ten okrąg cięciwa.
- ▷ W kole o promieniu 4 cm poprowadzono cięciwę o długości 4 cm. Oblicz pole powstałego odcinka koła.



spis treści

symbole

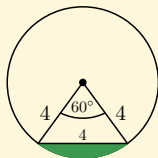
zgłoś błąd

13 kwiecień



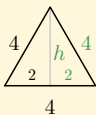
matma235@o2.pl

W kole o promieniu 4 cm poprowadzono **cięciwę** o długości 4 cm. Oblicz pole powstałego odcinka koła.



Pole **odcinka** koła jest równe polu **wycinka** koła zmniejszonego o pole trójkąta równobocznego.

Pole trójkąta równobocznego:



z tw. Pitagorasa

$$2^2 + h^2 = 4^2$$

$$h^2 = 16 - 4$$

$$h = \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3}$$

$$h = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

Pole trójkąta

$$P_t = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$$

$$P_t = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3}$$

$$P_t = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Pole **wycinka** koła:

$$P_w = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi r^2$$

$$P_w = \frac{60^\circ}{360^\circ} \pi 4^2$$

$$P_w = \frac{1}{6}\pi 16 = \frac{16}{6}\pi = 2\frac{2}{3}\pi \text{ cm}^2$$

Pole odcinka koła

$$P = P_w - P_t = 2\frac{2}{3}\pi - 4\sqrt{3} \approx \frac{8}{3} \cdot 3,14 - 4 \cdot 1,73 = 8,4 - 6,9 = 1,5 \text{ cm}^2$$

Odp. Pole odcinka koła wynosi $1,5 \text{ cm}^2$.



spis treści

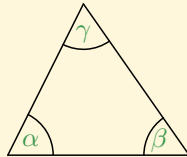
symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Kąty w trójkącie



Suma wszystkich kątów w trójkącie wynosi 180°

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

- kąty w trójkącie
- nierówność trójkąta
- wysokość
- środkowa
- symetralna
- dwusieczna
- trójkąt równoramienny
- trójkąt prostokątny
- obwód trójkąta
- pole trójkąta
- cechy przystawiania trójkątów
- cechy podobieństwa trójkątów
- okrąg opisany na trójkącie
- okrąg wpisany w trójkąt





spis treści

symbole

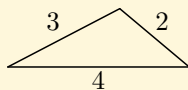
zgłoś błąd

13 kwiecień

Nierówność trójkąta

Dowolny bok trójkąta ma mniejszą długość od sumy długości pozostałych boków.

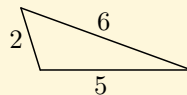
Przykłady:



$$3 < 4 + 2$$

$$4 < 3 + 2$$

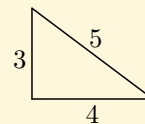
$$2 < 3 + 4$$



$$6 < 2 + 5$$

$$5 < 2 + 6$$

$$2 < 6 + 5$$



$$5 < 3 + 4$$

$$4 < 3 + 5$$

$$3 < 5 + 4$$





spis treści

symbole

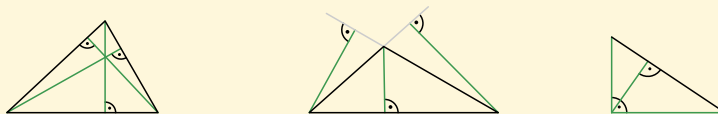
zgłoś błąd

13 kwiecień

Wysokość trójkąta

Wysokość to odcinek łączący wierzchołek trójkąta z podstawą lub jej przedłużeniem pod kątem prostym. Każdy trójkąt ma trzy wysokości.

Przykłady:



Wysokości lub ich przedłużenia przecinają się w jednym punkcie.





spis treści

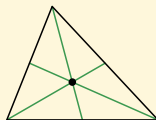
symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

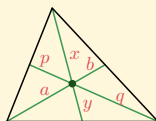
Środkowa trójkąta

Środkowa to odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.



Środkowe przecinają się w jednym punkcie.
Nazywamy go środkiem ciężkości trójkąta.

Środek ciężkości dzieli każdą **środkową** w stosunku 2:1.



$$\frac{x}{y} = \frac{2}{1}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{1}$$

$$\frac{q}{p} = \frac{2}{1}$$





spis treści

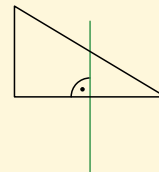
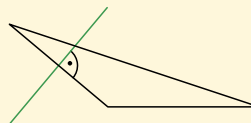
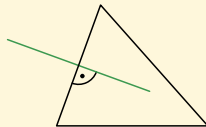
symbole

zgłoś błąd

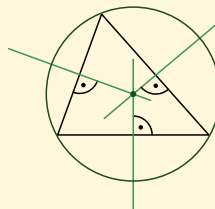
13 kwiecień

symetralna

Symetralna boku trójkąta to prosta prostopadła do boku i przechodząca przez jego środek.



Symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.





spis treści

symbole

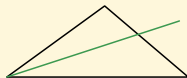
zgłoś błąd

13 kwiecień

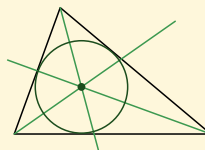


dwusieczna

Dwusieczna kąta to półprosta dzieląca go na dwa równe kąty.



Dwusieczne kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt.



Twierdzenie o dwusiecznej



spis treści

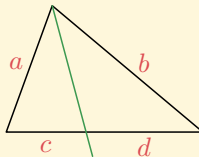
symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Twierdzenie o dwusiecznej



Dwusieczna dzieli bok trójkąta na odcinki c i d o długościach spełniających równanie:

$$\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



- ▷ Kąt przy wierzchołku trójkąta równoramiennego ma 100° . Oblicz pozostałe kąty.
- ▷ Oblicz wysokość trójkąta równoramiennego o podstawie 6 cm i ramieniu 4 cm.
- ▷ Oblicz pole trójkąta równoramiennego o kącie przy wierzchołku 120° i ramieniu 6 cm.



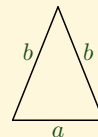
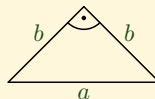
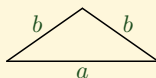
spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

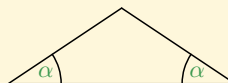
Trójkąt równoramienny



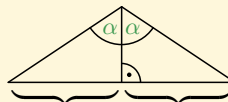
a – podstawa

b – ramiona

W trójkącie równoramiennym kąty przy podstawie są **równe**.



Wysokość dzieli podstawę i kąt przy wierzchołku trójkąta równoramiennego na dwie równe części.



odcinki o równej długości





spis treści

symbole

zgłoś błąd

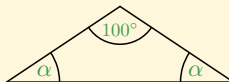
13 kwiecień



matma235@o2.pl

Kąt przy wierzchołku **trójkąta równoramiennego** ma 100° . Oblicz pozostałe kąty.

Rozwiązanie:



Kąty w trójkącie

$$\alpha + \alpha + 100^\circ = 180^\circ$$

$$2\alpha = 180^\circ - 100^\circ$$

$$2\alpha = 80^\circ / : 2$$

$$\alpha = 40^\circ$$

Odp. Kąty w trójkącie mają miarę 40° , 40° , 100° .



spis treści

symbole

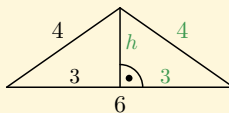
zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Oblicz wysokość trójkąta równoramiennego o podstawie 6 cm i ramieniu 4 cm.



Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa:

$$h^2 + 3^2 = 4^2$$

$$h^2 + 9 = 16$$

$$h^2 = 16 - 9$$

$$h^2 = 7$$

$$h = \sqrt{7} \text{ cm}$$

Odp. Wysokość trójkąta równoramiennego wynosi $\sqrt{7}$ cm.



spis treści

symbole

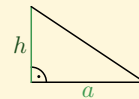
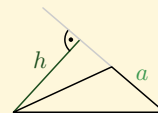
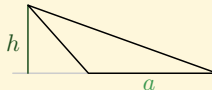
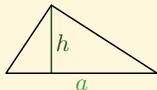
zgłoś błąd

13 kwiecień



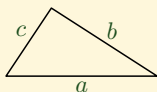
matma235@o2.pl

Pole trójkąta



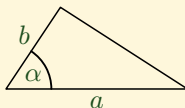
a – podstawa
 h – wysokość

$$P = \frac{1}{2}ah$$



wzór Herona: $P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ – połowa obwodu



$$P = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$$



spis treści

symbole

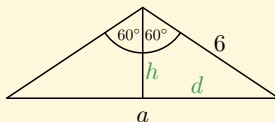
zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Oblicz pole trójkąta równoramiennego o kącie przy wierzchołku 120° i ramieniu 6 cm.



$$\triangleright \sin 60^\circ = \frac{d}{6}$$

$$\triangleright \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{d}{6}$$

$$2d = 6\sqrt{3} \quad / : 2$$

$$d = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\triangleright \cos 60^\circ = \frac{h}{6}$$

$$\triangleright \frac{1}{2} = \frac{h}{6}$$

$$2h = 6 \quad / : 2$$

$$h = 3 \text{ cm}$$

$$\text{Podstawa: } a = 2 \cdot d = 2 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\text{Pole: } P = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 3 = 3\sqrt{3} \cdot 3 = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Odp. Pole trójkąta wynosi $9\sqrt{3} \text{ cm}^2$.



spis treści

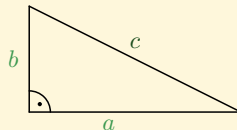
symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Trójkąt prostokątny



a, b – przyprostokątne

c – przeciwprostokątna

twierdzenie Pitagorasa
funkcje trygonometryczne



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



- ▷ Oblicz kąty trójkąta prostokątnego, który jest jednocześnie trójkątem równoramiennym.
- ▷ W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych ma długość 4 cm, a kąt przy niej 30° . Oblicz pole i obwód tego trójkąta.
- ▷ Oblicz wszystkie wysokości w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych 3 cm i 4 cm.



spis treści

symbole

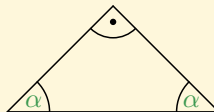
zgłoś błąd

13 kwiecień



Oblicz kąty trójkąta prostokątnego, który jest jednocześnie **trójkątem równoramiennym**.

Rozwiązanie:



Kąty w trójkącie

$$\alpha + \alpha + 90^\circ = 180^\circ$$

$$2\alpha = 180^\circ - 90^\circ$$

$$\alpha = 90^\circ / : 2$$

$$\alpha = 45^\circ$$

Odp. Kąty w trójkącie mają miarę 45° , 45° , 90° .



spis treści

symbole

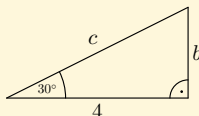
zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych ma długość 4 cm, a kąt przy niej 30° . Oblicz pole i obwód tego trójkąta.



$$\triangleright \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{b}{4}$$

$$\triangleright \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{b}{4}$$

mnożymy na krzyż

$$3b = 4\sqrt{3} \quad / : 3$$

$$b = \frac{4}{3}\sqrt{3}\text{cm}$$

$$\triangleright \cos 30^\circ = \frac{4}{c}$$

$$\triangleright \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{c}$$

mnożymy na krzyż

$$\sqrt{3}c = 8 \quad / : \sqrt{3}$$

$$c = \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}\text{cm}$$

Pole: $P = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{4}{3}\sqrt{3} = 2 \cdot \frac{4}{3}\sqrt{3} = \frac{8}{3}\sqrt{3} = 2\frac{2}{3}\sqrt{3}\text{ cm}^2$

Obwód: $Obw = 4 + \frac{4}{3}\sqrt{3} + \frac{8\sqrt{3}}{3} = 4 + \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4 + 4\sqrt{3}\text{ cm}$

Odp. Pole trójkąta wynosi $2\frac{2}{3}\sqrt{3}\text{ cm}^2$, a obwód $4 + 4\sqrt{3}\text{ cm}$.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

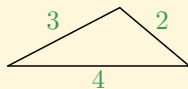


matma235@o2.pl

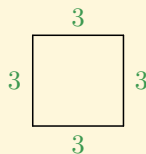
Obwód wielokąta

Obwód dowolnego wielokątów otrzymujemy dodając długości wszystkich boków.

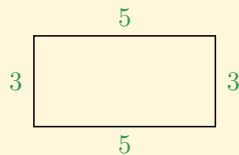
Przykłady:



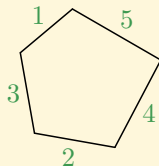
$$Obw = 4 + 2 + 3 = 9$$



$$Obw = 4 \cdot 3 = 12$$



$$Obw = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 10 + 6 = 16$$



$$Obw = 4 + 5 + 1 + 3 + 2 = 27$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

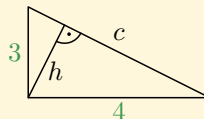


matma235@o2.pl

Oblicz wszystkie wysokości w **trójkącie prostokątnym** o przyprostokątnych 3 cm i 4 cm.

Rozwiązanie:

Przyprostokątne w trójkącie prostokątnym są jednocześnie **wysokościami**. Pozostaje do znalezienia trzecia wysokość.



Obliczamy długość przeciwprostokątnej

$$c = 5 \text{ cm}$$

Obliczamy **pole trójkąta** na dwa sposoby

z przyprostokątnych

$$P = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3$$

$$P = 2 \cdot 3 = 6$$

z przeciwprostokątnej

$$P = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot h = \frac{5}{2}h$$

$$6 = \frac{5}{2}h$$

$$\frac{5}{2}h = 6 \quad / : \frac{5}{2}$$

$$h = 6 : \frac{5}{2} = 6 \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5} \text{ cm}$$

Odp. Wysokości w trójkącie mają długość 3 cm, 4 cm, i $2\frac{2}{5}$ cm.



spis treści

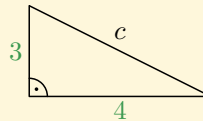
symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Twierdzenie Pitagorasa



$$4^2 + 3^2 = c^2$$

$$c^2 = 16 + 9$$

$$c^2 = 25$$

$$c = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

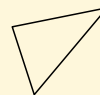
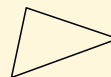
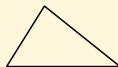


matma235@o2.pl

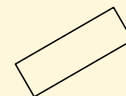
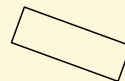
Przystawanie wielokątów

Dwie figury nazywamy **przystającymi**, gdy można je nałożyć na siebie tak, aby dokładnie się pokryły.

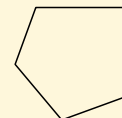
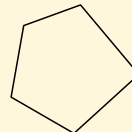
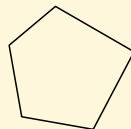
przystające
trójkąty:



przystające
prostokąty:



przystające
pięciokąty:





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



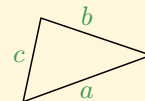
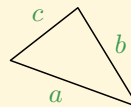
matma235@o2.pl

Cechy przystawania trójkątów

Przystawanie wielokątów

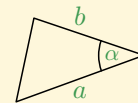
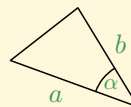
(bbb) bok – bok – bok

odpowiednie boki trójkątów są równe



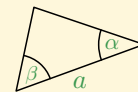
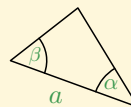
(bkb) bok – kąt – bok

odpowiednie dwa boki trójkątów są równe
i kąt między nimi.



(kbb) kąt – bok – kąt

odpowiednie dwa kąty trójkątów są równe
i bok do nich przyległy



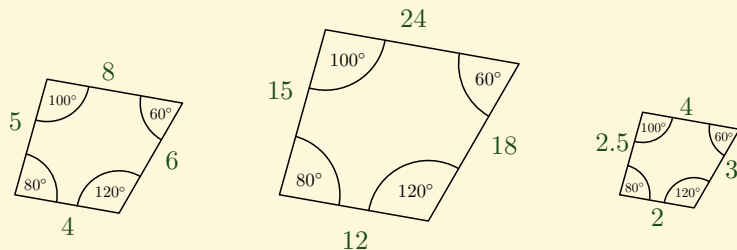
Podobieństwo wielokątów

Wielokąty są podobne, jeżeli ich kąty są odpowiednio równe, a boki proporcjonalne w skali równej k .



$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \frac{d'}{d} = \frac{e'}{e} = k$$

Przykład:



$$\frac{12}{4} = \frac{18}{6} = \frac{24}{8} = \frac{15}{5} = 3$$

$$k = 3$$

$$\frac{2}{12} = \frac{3}{18} = \frac{4}{24} = \frac{2,5}{15} = \frac{1}{6}$$

$$k = \frac{1}{6}$$



spis treści

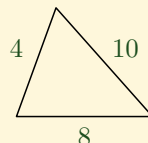
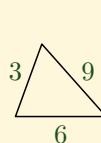
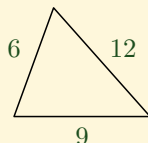
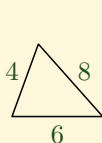
symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

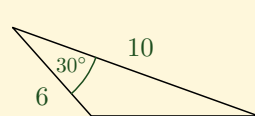
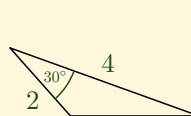
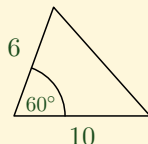
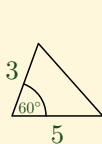


Sprawdź, czy trójkąty są podobne.



▷ Trójkąt o bokach 2, 5, 6 jest podobny do trójkąta, którego najkrótszy bok wynosi 8. Oblicz pozostałe boki tego trójkąta.

Sprawdź, czy trójkąty są podobne.



▷ W słoneczny dzień chłopiec o wzroście 1,6 m rzuca cień o długości 2 m. Oblicz wysokość drzewa, które rzuca cień o długości 12 cm.



spis treści

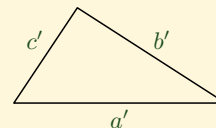
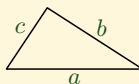
symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

(bbb) bok – bok – bok

Jeżeli boki trójkątów są proporcjonalne, to trójkąty są **podobne**.



$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k$$

k – skala podobieństwa



matma235@o2.pl



spis treści

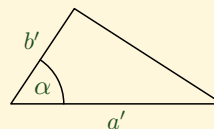
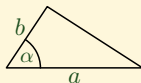
symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

(bbb) bok – kąt – bok

Jeżeli trójkąty mają jeden kąt równy, a ramiona tego kąta są proporcjonalne, to trójkąty są podobne.



$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = k$$



matma235@o2.pl



spis treści

symbole

zgłoś błąd

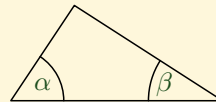
13 kwiecień

(bbb) kąt – kąt – kąt

Jeżeli kąty trójkątów są równe, to trójkąty są podobne.



W praktyce, jeżeli trójkąty mają dwa kąty równe, to trzeci też musi być równy.



matma235@o2.pl



spis treści

symbole

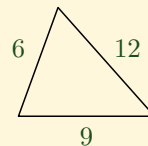
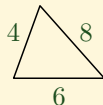
zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Sprawdź, czy trójkąty są podobne.



Cecha podobieństwa bok – bok – bok

Przyrównujemy odpowiednie boki do siebie:

– najdłuższe

$$\frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

– najkrótsze

$$\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

– pozostałe

$$\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

Odp. Odpowiednie boki są proporcjonalne, zatem trójkąty są podobne.



spis treści

symbole

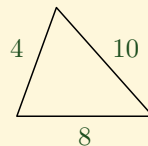
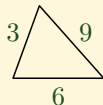
zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Sprawdź, czy trójkąty są podobne.



Cecha podobieństwa bok – bok – bok

Przyrównujemy odpowiednie boki do siebie:

– najdłuższe

$$\frac{10}{9}$$

– najkrótsze

$$\frac{4}{3}$$

– pozostałe

$$\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Odp. Odpowiednie boki nie są proporcjonalne, zatem trójkąty nie są podobne.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

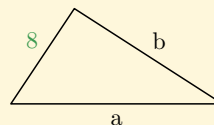
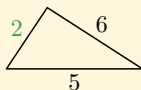
13 kwiecień



matma235@o2.pl

Trójkąt o bokach 2, 5, 6 jest podobny do trójkąta, którego najkrótszy bok wynosi 8. Oblicz pozostałe boki tego trójkąta.

Rozwiązanie:



cecha bok – bok – bok

Przyrównujemy najkrótsze boki do siebie i obliczamy skalę podobieństwa.

$$k = \frac{8}{2} = 4$$

$$\frac{a}{5} = 4$$

$$a = 4 \cdot 5$$

$$a = 20$$

$$\frac{b}{6} = 4$$

$$b = 4 \cdot 6$$

$$b = 24$$

Odp. Pozostałe boki mają długości 20, 24.



spis treści

symbole

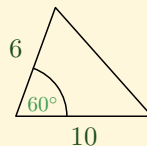
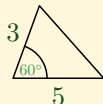
zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Sprawdź, czy trójkąty są podobne



Rozwiązanie:

cecha podobieństwa bok – kąt – bok

Trójkąty mają kąt o tej samej mierze. Przyrównujemy do siebie ramiona tych kątów.

– najdłuższe

$$\frac{10}{5} = 2$$

– najkrótsze

$$\frac{6}{3} = 2$$

Odp. Trójkąty mają jeden równy kąt, a jego ramiona są proporcjonalne, zatem trójkąty są podobne.



spis treści

symbole

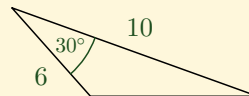
zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Sprawdź, czy trójkąty są podobne



Rozwiązanie:

cecha podobieństwa bok – kąt – bok

Trójkąty mają kąt o tej samej mierze. Przyrównujemy do siebie ramiona tych kątów.

– najdłuższe

$$\frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

– najkrótsze

$$\frac{6}{2} = 3$$

Odp. Trójkąty mają jeden równy kąt, ale jego ramiona nie są proporcjonalne, zatem trójkąty nie są podobne.



spis treści

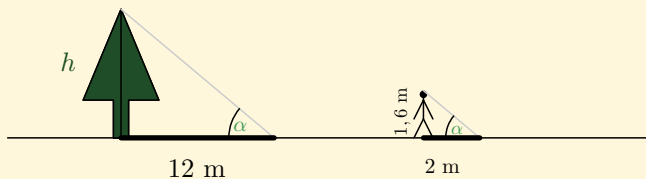
symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



W słoneczny dzień chłopiec o wzroście 1,6 m rzuca cień o długości 2 m. Oblicz wysokość drzewa, które rzuca cień o długości 12 cm.



Trójkąty mają te same kąty, ponieważ:

- są to trójkąty prostokątne
- kąt padania α promieni słonecznych jest taki sam dla drzewa jak i dla chłopca.

Trójkąty o tych samych kątach na podstawie cechy **kąt – kąt – kąt** są podobne, a więc ich odpowiednie boki są proporcjonalne.

$$\begin{aligned}\frac{1,6}{h} &= \frac{2}{12} \\ h \cdot 2 &= 1,6 \cdot 12 \quad / : 2 \\ h &= 9,6\end{aligned}$$

Odp. Drzewo ma wysokość 9,6 m.

wzory, twierdzenia, definicje

- definicja funkcji

Pojęcia opisujące funkcję:

- dziedzina
- zbiór wartości (przeciwdziedzina)
- miejsce zerowe
- monotoniczność
- różnowartościowość
- parzystość i nieparzystość
- okresowość
- funkcja liniowa
- proste równoległe i prostopadłe
- przesuwanie wykresu funkcji

przykłady





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Znajdź dziedzinę funkcji.

$$\triangleright f(x) = \sqrt{3x+9}$$

$$\triangleright f(x) = \sqrt{4-2x}$$

$$\triangleright f(x) = \frac{5}{2x+6}$$

$$\triangleright f(x) = \frac{4}{x(x+3)}$$



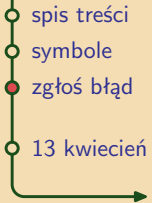
matma235@o2.pl

Funkcja wykładnicza

wzory, twierdzenia, definicje

- funkcja wykładnicza
- potęgowanie

przykłady

- 
- spis treści
 - symbole
 - zgłoś błąd
 - 13 kwiecień





Rozwiąż równania:

$$\triangleright 4^{x+2} = 8^{3x-1}$$

$$\triangleright (0,25)^{2x-1} = (\sqrt{8})^{x+4}$$

$$\triangleright 9^{2x+3} = 3\sqrt{27}$$

spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Rozwiąż nierówności:

$$\triangleright 3^{3x-1} < 3^{2x+4}$$

$$\triangleright \left(\frac{2}{3}\right)^{4x-2} > \left(\frac{9}{4}\right)^{2x-3}$$

$$\triangleright (0,2)^{4x-1} < (0,2)^{x+2}$$

$$\triangleright 4(\sqrt{8})^{x-3} \leq \left(\frac{2\sqrt{2}}{16}\right)^{1-x}$$

$$\triangleright (0,125)^x \geq 4^{x-3}$$



przykłady

- 
- spis treści
 - symbole
 - zgłoś błąd
 - 13 kwiecień

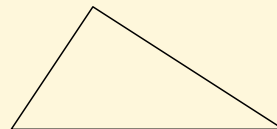
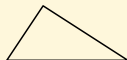


Cechy podobieństwa trójkątów

bok – bok – bok

bok – kąt – bok

kąt – kąt – kąt



- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

Ten ebook jest z 13 kwietnia 2006r.

Najnowsza wersja: www.matma.boo.pl

www.matma235.prv.pl



matma235@o2.pl



spis treści

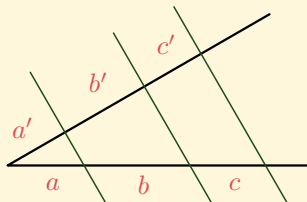
symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

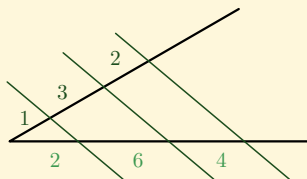
Twierdzenie Talesa

Jeżeli ramiona kąta przetniemy prostymi równoległymi, to otrzymamy odcinki proporcjonalne.



$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

Przykład:



$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{2}{4}$$





spis treści

symbole

zgłoś błąd

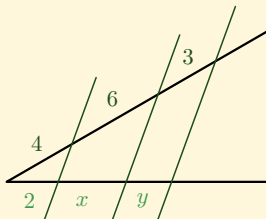
13 kwiecień



matma235@o2.pl

Wyznacz długości odcinków x , y .

Rozwiązanie:



Na podstawie [twierdzenia Talesa](#) przyrównujemy do siebie odpowiednie odcinki.

$$\frac{4}{2} = \frac{6}{x}$$

$$\frac{4}{2} = \frac{3}{y}$$

mnożymy na krzyż

$$4x = 2 \cdot 6$$

$$4y = 2 \cdot 3$$

$$x = 3$$

$$y = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

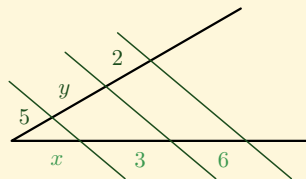
13 kwiecień



matma235@o2.pl

Wyznacz długości odcinków x , y .

Rozwiązanie:



Na podstawie [twierdzenia Talesa](#) przyrównujemy do siebie odpowiednie odcinki.

$$\frac{5}{x} = \frac{2}{6}$$

mnożymy na krzyż

$$2x = 5 \cdot 6 \quad / : 2$$

$$x = 15$$

$$\frac{y}{3} = \frac{2}{6}$$

$$6y = 6 \quad / : 6$$

$$y = 1$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

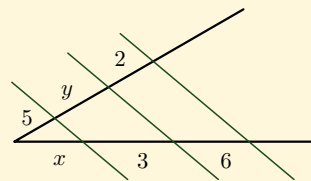
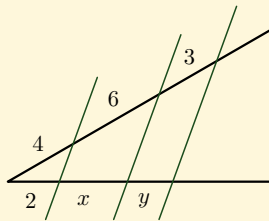
13 kwiecień



matma235@o2.pl



Wyznacz długości odcinków x , y .



- ▷ Podziel konstrukcyjnie odcinek na trzy równe części.
- ▷ Podziel konstrukcyjnie odcinek w stosunku 2:3.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



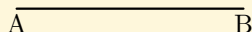
matma235@o2.pl

Podziel konstrukcyjnie odcinek na trzy równe części.

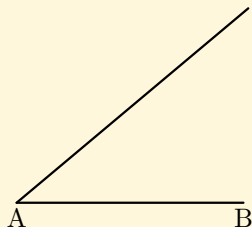
Rozwiązanie:

Konstrukcje w geometrii wykonujemy wykorzystując **tylko** cyrkiel i linijkę.

Rysujemy odcinek.



Rysujemy półprostą.



dalej



spis treści

symbole

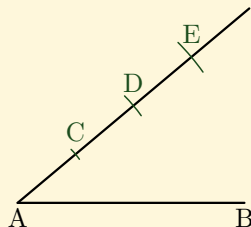
zgłoś błąd

13 kwiecień

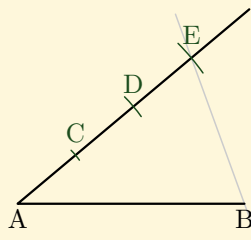


matma235@o2.pl

Zaznaczamy cyrklem na półprostej trzy równe odcinki o dowolnej długości.



Przez punkty E i B prowadzimy prostą.



dalej



spis treści

symbole

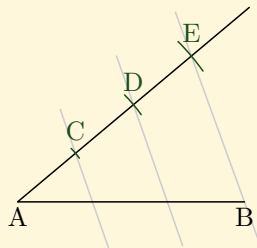
zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Przez punkty C i D prowadzimy proste równoległe do pierwszej.



Odcinek AB został podzielony na trzy części. To że są równe wynika z [twierdzenia Talesa](#).



spis treści

symbole

zgłoś błąd

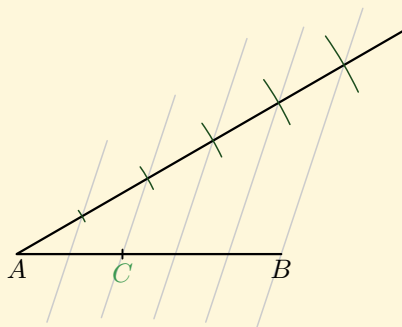
13 kwiecień



Podziel konstrukcyjnie odcinek w stosunku 2:3.

Rozwiązanie:

Dzielimy odcinek na 5 części podobnie jak [tutaj](#).



Odcinek AB został podzielony na pięć części. To że są równe wynika z [twierdzenia Talesa](#). Punkt C dzieli odcinek AB w stosunku 2:3.



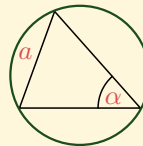
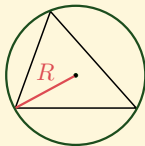
spis treści

symbole

zgłoś błąd

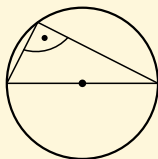
13 kwiecień

okrąg opisany na trójkącie



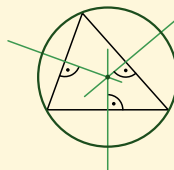
promień: $R = \frac{a}{2 \sin \alpha}$

a – dowolny bok
 α – kąt naprzeciw tego boku



Trójkąt **oparty** na średnicy jest prostokątny.

Środek okręgu opisanego na trójkącie znajdujemy rysując **symetralne** boków trójkąta.





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



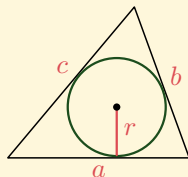
matma235@o2.pl

okrąg wpisany w trójkąt

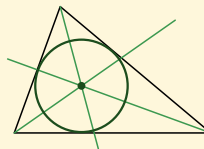
promień okręgu:

$$r = \frac{2P}{a + b + c}$$

P - pole trójkąta



Środek okręgu wpisanego w trójkąt znajdujemy rysując **dwusieczne** kątów trójkąta.





spis treści

symbole

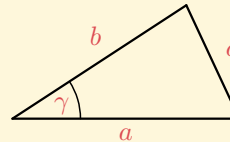
zgłoś błąd

13 kwiecień



twierdzenie cosinusów

Jeżeli mamy długość dwóch boków trójkąta i kąt jaki tworzą, to możemy wyznaczyć długość trzeciego.



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

przykłady

spis treści

symbole

zgłoś błąd

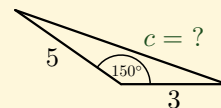
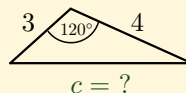
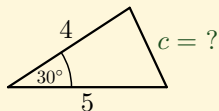
13 kwiecień



matma235@o2.pl



twierdzenie cosinusów



▷ Dwa boki trójkąta mają długość 3 cm i 4 cm i tworzą kąt 60° . Oblicz długość trzeciego.



spis treści

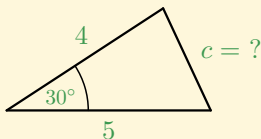
symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl



Rozwiązanie:
twierdzenie cosinusów

$$c^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cos 30^\circ$$

$$c^2 = 25 + 16 - 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \triangleright$$

$$c^2 = 41 - 20\sqrt{3}$$

$$c = \sqrt{41 - 20\sqrt{3}}$$



spis treści

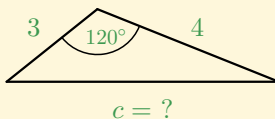
symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl



Rozwiązanie:

twierdzenie cosinusów

$$c^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ$$

$$c^2 = 9 + 16 - 24 \cos 120^\circ$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ \triangleq -\frac{1}{2}$$

$$c^2 = 25 - 24 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$c^2 = 25 + 12$$

$$c^2 = 37$$

$$c = \sqrt{37}$$



spis treści

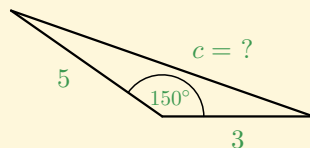
symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl



Rozwiązanie:

twierdzenie cosinusów

$$c^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 150^\circ$$

$$c^2 = 9 + 25 - 30 \cos 150^\circ$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ \triangleq -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$c^2 = 34 - 30 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$c^2 = 25 + 15\sqrt{3}$$

$$c = \sqrt{25 + 15\sqrt{3}}$$



spis treści

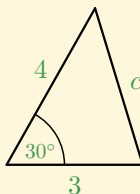
symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl



Rozwiązanie:

twierdzenie cosinusów

$$c^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ$$

$$c^2 = 9 + 16 - 24 \cdot \frac{1}{2} \quad \triangleright$$

$$c^2 = 25 - 12$$

$$c = \sqrt{13}$$

Odp. Trzeci bok ma długość $\sqrt{13}$ cm.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

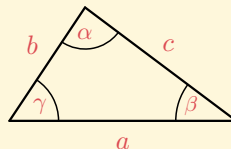
13 kwiecień



matma235@o2.pl

twierdzenie sinusów

Dzieląc długość dowolnego boku trójkąta przez sinus kąta naprzeciwko otrzymujemy ten sam wynik.



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

przykłady



spis treści

symbole

zgłoś błąd

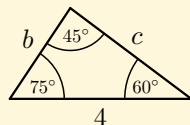
13 kwiecień



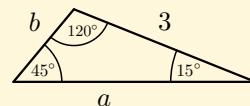
matma235@o2.pl



twierdzenie sinusów



$$b = ? \quad c = ?$$



$$a = ? \quad b = ?$$

▷ W trójkącie dwa boki mają długość 6 cm i $3\sqrt{6}$ cm. Naprzeciw boku o długości 6 cm jest kąt o mierze 45° . Oblicz pozostałe kąty trójkąta.



spis treści

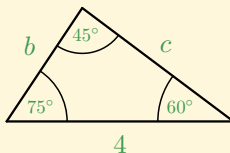
symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl



Rozwiązanie:

twierdzenie sinusów

$$\frac{4}{\sin 45^\circ} = \frac{b}{\sin 60^\circ}$$

$$\frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \triangleright$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}b = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}b = 2\sqrt{3} \quad / : \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$b = 2\sqrt{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$b = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{6}}{2}$$

$$b = 2\sqrt{6}$$

$$\frac{4}{\sin 45^\circ} = \frac{c}{\sin 75^\circ}$$

$$\frac{4}{0,71} = \frac{c}{0,97} \triangleright$$

$$0,71c = 4 \cdot 0,97 \quad / : 0,71$$

$$c = 5,46$$

Odp. Pozostałe boki trójkąta mają długość $2\sqrt{6}$ cm i 5,46 cm.



spis treści

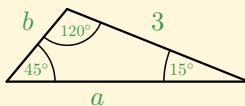
symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl



Rozwiązanie:

twierdzenie sinusów

$$\frac{3}{\sin 45^\circ} = \frac{a}{\sin 120^\circ}$$

$$\frac{3}{\sin 45^\circ} = \frac{b}{\sin 15^\circ}$$

na podstawie $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ \triangleq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{3}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \triangleright$$

$$\frac{4}{0,71} = \frac{c}{0,97} \triangleright$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} a = 3 \frac{\sqrt{3}}{2} \quad / : \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$0,71c = 4 \cdot 0,97 \quad / : 0,71$$

$$a = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$b = 1,1$$

$$a = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

Odp. Pozostałe boki trójkąta mają długość $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ cm i 1,1 cm.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

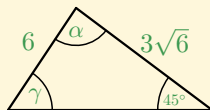
13 kwiecień



matma235@o2.pl

W trójkącie dwa boki mają długość 6 cm i $3\sqrt{6}$ cm. Naprzeciw boku o długości 6 cm jest kąt o mierze 45° . Oblicz pozostałe kąty trójkąta.

Rozwiązanie:



$$\sin \gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ponieważ $\sin(180^\circ - \gamma) = \sin \gamma$

$$\sin \gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\gamma = 60^\circ$$

$$\sin(180^\circ - \gamma) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$180^\circ - \gamma = 60^\circ$$

$$-\gamma = 60^\circ - 180^\circ$$

$$\gamma = 120^\circ$$

Istnieją dwa kąty γ dla których $\sin \gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\triangleright \alpha + 60^\circ + 45^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ$$

$$\alpha = 75^\circ$$

$$\triangleright \alpha + 120^\circ + 45^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - 120^\circ - 45^\circ$$

$$\alpha = 15^\circ$$

Odp. Otrzymaliśmy dwa trójkąty spełniające warunki zadania. Jeden ma kąty 75° , 60° , 45° , a drugi 15° , 120° , 45° .

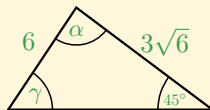


spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



twierdzenie sinusów

$$\frac{6}{\sin 45^\circ} = \frac{3\sqrt{6}}{\sin \gamma}$$

$$\frac{6}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3\sqrt{6}}{\sin \gamma}$$

$$6 \sin \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3\sqrt{6}$$

$$6 \sin \gamma = \frac{3\sqrt{12}}{2} = \frac{3\sqrt{4 \cdot 3}}{2} = \frac{3 \cdot 2\sqrt{3}}{2}$$

$$6 \sin \gamma = 3\sqrt{3} \quad / : 6$$

$$\sin \gamma = \frac{3\sqrt{3}}{6}$$

$$\sin \gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

Na razie nie ma rozwiązania tego zadania. Planuję jednak je napisać. Ten ebook pochodzi z 13 kwietnia, może w aktualnej wersji już jest.

Najnowsza wersja: www.matma.boo.pl www.matma235.prv.pl



matma235@o2.pl



▷ Zadanie 1 (3 pkt)

W pudełku są trzy kule białe i pięć kul czarnych. Do pudełka można albo dołożyć jedną kulę białą albo usunąć z niego jedną kulę czarną, a następnie wylosować z tego pudełka jedną kulę. W którym z tych przypadków wylosowanie kuli białej jest bardziej prawdopodobne? Wykonaj odpowiednie obliczenia.

▷ Zadanie 2 (4 pkt)

Dany jest ciąg (a_n) , gdzie $a_n = \frac{n+2}{3n+1}$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$. Wyznacz wszystkie wyrazy tego ciągu większe od $\frac{1}{2}$.

▷ Zadanie 3 (4 pkt)

Dany jest wielomian $W(x) = x^3 + kx^2 - 4$

- Wyznacz współczynnik k tego wielomianu wiedząc, że wielomian ten jest podzielny przez dwumian $x + 2$.
- Dla wyznaczonej wartości k rozłóż wielomian na czynniki i podaj wszystkie jego pierwiastki.

▷ Zadanie 4 (5 pkt)

Na trzech półkach ustawiono 76 płyt kompaktowych. Okazało się, że liczby płyt na półkach górnej, środkowej i dolnej tworzą rosnący ciąg geometryczny. Na środkowej półce stoją 24 płyty. Oblicz, ile płyt stoi na półce górnej, a ile płyt stoi na półce dolnej.

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień





▷ Zadanie 5 (4 pkt)

Sklep sprowadza z hurtowni kurtki płacąc po 100 zł za sztukę i sprzedaje średnio 40 sztuk miesięcznie po 160 zł. Zaobserwowano, że każda kolejna obniżka ceny sprzedaży kurtki o 1 zł zwiększa sprzedaż miesięczną o 1 sztukę. Jaką cenę kurtki powinien ustalić sprzedawca, aby jego miesięczny zysk był największy?

▷ Zadanie 6 (6 pkt)

Dane są zbiory liczb rzeczywistych:

$$A = \{x : |x + 2| < 3\}$$

$$B = \{x : (2x - 1)^3 \leq 8x^3 - 13x^2 + 6x + 3\}$$

Zapisz w postaci przedziałów liczbowych zbiory A , B , $A \cap B$, oraz $B - A$.

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień





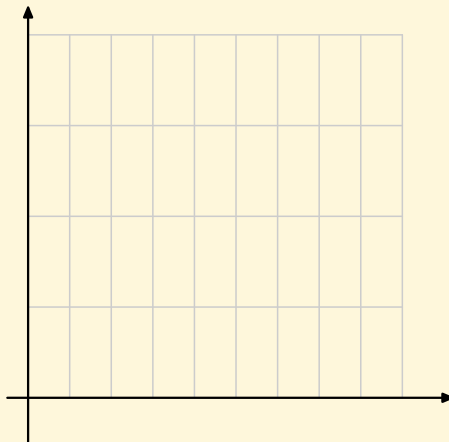
▷ Zadanie 7 (5 pkt)

W poniższej tabeli przedstawiono wyniki sondażu przeprowadzonego w grupie uczniów, dotyczącego czasu przeznaczonego dziennie na przygotowywanie zadań domowych.

Czas (w godzinach)	1	2	3	4
Liczba uczniów	5	10	15	10



matma235@o2.pl

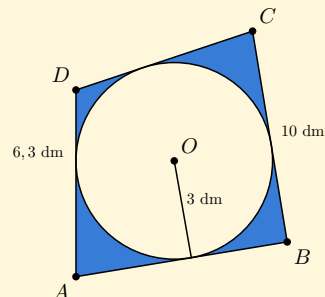


- Naszkicuj diagram słupkowy ilustrujący wyniki tego sondażu
- Oblicz średnią liczbę godzin, jaką uczniowie przeznaczają dziennie na przygotowanie zadań domowych.
- Oblicz wariancję i odchylenie standardowe czasu przeznaczonego dziennie na przygotowanie zadań domowych. Wynik podaj z dokładnością do 0,01.



▷ **Zadanie 8** (6 pkt)

Z kawałka materiału o kształcie i wymiarach czworokąta $ABCD$ (patrz na rysunek obok) wycięto okrągłą serwetkę o promieniu 3 dm. Oblicz, ile procent całego materiału stanowi jego niewykorzystana część. Wynik podaj z dokładnością 0,01 procenta.



▷ **Zadanie 9** (6 pkt)

Rodzeństwo w wieku 8 i 10 lat otrzymało razem w spadku 84100 zł. Kwotę tę złożono w banku, który stosuje kapitalizację roczną przy rocznej stopie procentowej 5%. Każde z dzieci otrzyma swoją część spadku z chwilą osiągnięcia 21 lat. Życzeniem spadkodawcy było takie podzielenie kwoty spadku, aby w przyszłości obie wypłacone części spadku zaokrąglone do 1 zł były równe. Jak należy podzielić kwotę 84100 zł między rodzeństwo? Zapisz wszystkie wykonane obliczenia.

▷ **Zadanie 10** (7 pkt)

W ostrosłupie czworokątnym prawidłowym wysokości przeciwległych ścian bocznych poprowadzone z wierzchołka ostrosłupa mają długości h i tworzą kąt o mierze 2α . Oblicz objętość tego ostrosłupa.





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matura poprawkowa styczeń 2006

podstawowa

rozszerzona

matura próbna grudzień 2005

podstawowa

rozszerzona

matura maj 2005

podstawowa

rozszerzona

matura maj 2003

podstawowa

rozszerzona

matura styczeń 2003

podstawowa

rozszerzona

matura maj 2002

podstawowa

matura próbna wrzesień 2001

podstawowa

Zadania i rozwiązania napisałem na podstawie oryginalnych arkuszy egzaminacyjnych i modeli odpowiedzi dostępnych na [stronach CKE](#).



▷ **Zadanie 11** (3 pkt)

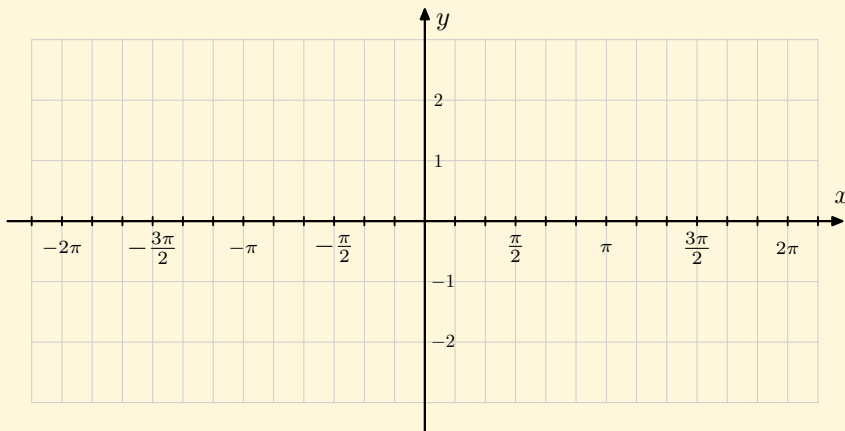
Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \log_{x^2-3}(x^3 + 4x^2 - x - 4)$ i zapisz ją w postaci sumy przedziałów liczbowych.

▷ **Zadanie 12** (4 pkt)

Dana jest funkcja: $f(x) = \cos x - \sqrt{3} \sin x$, $x \in \mathbf{R}$.

a) Naszkicuj wykres funkcji f .

b) Rozwiąż równanie: $f(x) = 1$.





▷ **Zadanie 13** (4 pkt)

Rzucamy n razy dwiema symetrycznymi sześciennymi kostkami do gry. Oblicz, dla jakich n prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej raz tej samej liczby oczek na obu kostkach jest mniejsze od $\frac{671}{1296}$.

▷ **Zadanie 14** (5 pkt)

Oblicz: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2)}{5 + 7 + 9 + \dots + (2n + 3)}$

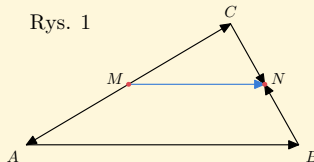




▷ Zadanie 15 (4 pkt)

W dowolnym trójkącie ABC punkty M i N są odpowiednio środkami boków AC i BC

Rys. 1



Zapoznaj się uważnie z następującym rozumowaniem:

Korzystając z własności wektorów i działań na wektorach, zapisujemy równości:

$$(1) \quad \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$$

oraz

$$(2) \quad \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN}$$

Po dodaniu równości (1) i (2) stronami otrzymujemy:

$$2 \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN}$$

$$\overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MA} \text{ oraz } \overrightarrow{CN} = -\overrightarrow{BN}, \text{ więc:}$$

$$2 \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BN}$$

$$2 \cdot \overrightarrow{MN} = \vec{0} + \overrightarrow{AB} + \vec{0}$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Wykorzystując własności iloczynu wektora przez liczbę, ostatnią równość można zinterpretować następująco:

odcinek łączący środki dwóch boków dowolnego trójkąta jest równoległy do trzeciego boku tego trójkąta, zaś jego długość jest równa połowie długości tego boku.

spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień





▷ **Zadanie 16** (5 pkt)

Sześcian o krawędzi długości a przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem $\frac{\pi}{3}$. Sporządź odpowiedni rysunek. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

▷ **Zadanie 17** (7 pkt)

Wykaż, bez użycia kalkulatora i tablic, że $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ jest liczbą całkowitą.

▷ **Zadanie 18** (8 pkt)

Pary liczb (x, y) spełniające układ równań:

$$\begin{cases} -4x^2 + y^2 + 2y + 1 = 0 \\ -x^2 + y + 4 = 0 \end{cases}$$

są współzrędnymi wierzchołków czworokąta wypukłego $ABCD$.

- Wyznacz współrzędne punktów: A, B, C, D .
- Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem równoramiennym.
- Wyznacz równanie okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$.

▷ **Zadanie 19** (10 pkt)

Dane jest równanie: $x^2 + (m - 5)x + m^2 + m + \frac{1}{4} = 0$.

Zbadaj, dla jakich wartości parametru m stosunek sumy pierwiastków rzeczywistych równania do ich iloczynu przyjmuje wartość najmniejszą. Wyznacz tę wartość.

spis treści
symbole
zgłosz błęd
13 kwiecień





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl



▷ **Zadanie 1** (4 pkt)

Wielomian $P(x) = x^3 - 21x + 20$ rozłóż na czynniki liniowe, to znaczy zapisz go w postaci iloczynu trzech wielomianów stopnia pierwszego.

▷ **Zadanie 2** (4 pkt)

W roku 2005 na uroczystości urodzin zapytano jubilata, ile ma lat. Jubilat odpowiedział: „Jeśli swój wiek sprzed 10 lat pomnożę przez swój wiek za 11 lat, to otrzymam rok mojego urodzenia”. Ułóż odpowiednie równanie, rozwiąż je i zapisz, w którym roku urodził się ten jubilat.

▷ **Zadanie 3** (5 pkt)

Funkcja $f(x)$ jest określona wzorem:
$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{dla } x \in \langle -1, 1 \rangle \\ -(x - 1)^2 & \text{dla } x \in \langle 1, 3 \rangle \end{cases}$$

- Sprawdź, czy liczba $a = (0, 25)^{-0,5}$ należy do dziedziny funkcji $f(x)$.
- Oblicz $f(2)$ oraz $f(3)$.
- Sporządź wykres funkcji $f(x)$.
- Podaj rozwiązanie równania $f(x) = 0$.
- Zapisz zbiór wartości funkcji $f(x)$.

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień





▷ Zadanie 4 (6 pkt)

W układzie współrzędnych są dane dwa punkty: $A = (-2, 2)$ i $B = (4, 4)$.

- Wyznacz równanie prostej AB .
- Prosta AB oraz prosta o równaniu $9x - 6y - 26 = 0$ przecinają się w punkcie C . Oblicz współrzędne punktu C .
- Wyznacz równanie symetralnej odcinka AB .

▷ Zadanie 5 (5 pkt)

Nieskończony ciąg liczbowy (a_n) jest określony wzorem $a_n = 4n - 31$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Wyrazy a_k , a_{k+1} , a_{k+2} danego ciągu (a_n) , wzięte w takim porządku, powiększono: wyraz a_k o 1, wyraz a_{k+1} o 3 oraz wyraz a_{k+2} o 23. W ten sposób otrzymano trzy pierwsze wyrazy pewnego ciągu geometrycznego. Wyznacz k oraz czwarty wyraz tego ciągu geometrycznego.

▷ Zadanie 6 (4 pkt)

Do szkolnych zawodów szachowych zgłosiło się 16 uczniów, wśród których było dwóch faworytów. Organizatorzy zawodów zamierzają losowo podzielić szachistów na dwie jednakowo liczne grupy eliminacyjne, Niebieską i Żółtą. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że faworyci tych zawodów nie znajdą się w tej samej grupie eliminacyjnej. Końcowy wynik obliczeń zapisz w postaci ułamka nieskracalnego.

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień





▷ Zadanie 7 (3 pkt)

Aby wyznaczyć wszystkie liczby całkowite c , dla których liczba postaci $\frac{c-3}{c-5}$ jest także liczbą całkowitą można postąpić w następujący sposób:

a) Wyrażenie w liczniku ułamka zapisujemy w postaci sumy, której jednym ze składników jest wyrażenie z mianownika:

$$\frac{c-3}{c-5} = \frac{(c-5)+2}{c-5}$$

b) Zapisujemy powyższy ułamek w postaci sumy liczby 1 oraz pewnego ułamka:

$$\frac{c-5+2}{c-5} = \frac{c-5}{c-5} + \frac{2}{c-5} = 1 + \frac{2}{c-5}$$

c) Zauważmy, że ułamek $\frac{2}{c-5}$ jest liczbą całkowitą wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $(c-5)$ jest całkowitym dzielnikiem liczby 2, czyli $(c-5) \in \{-1, 1, -2, 2\}$.

d) Rozwiązujemy kolejno równania $c-5 = -1$, $c-5 = 1$, $c-5 = -2$, $c-5 = 2$,
i otrzymujemy odpowiedź: liczba postaci $\frac{c-3}{c-5}$ jest całkowita dla:
 $c = 4$, $c = 6$, $c = 3$, $c = 7$.

Rozumując analogicznie, wyznacz wszystkie liczby całkowite x , dla których liczba postaci $\frac{x}{x-3}$ jest liczbą całkowitą.

spis treści

symbole

zgłoś błąd

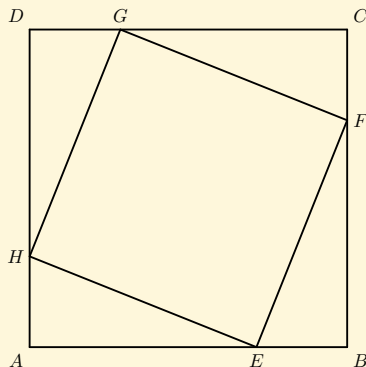
13 kwiecień





▷ Zadanie 8 (5 pkt)

W kwadrat $ABCD$ wpisano kwadrat $EFGH$, jak pokazano na poniższym rysunku. Wiedząc, że $|AB| = 1$ oraz tangens kąta AEH równa się $\frac{2}{5}$, oblicz pole kwadratu $EFGH$.



▷ Zadanie 9 (7 pkt)

Liczbę naturalną t_n nazywamy n -tą liczbą trójkątną, jeżeli jest ona sumą n kolejnych, początkowych liczb naturalnych. Liczbami trójkątnymi są zatem: $t_1 = 1$, $t_2 = 1 + 2 = 3$, $t_3 = 1 + 2 + 3 = 6$, $t_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$, $t_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Stosując tę definicję:

- wyznacz liczbę t_{17} .
- ułóż odpowiednie równanie i zbadaj, czy liczba 7626 jest liczbą trójkątną.
- wyznacz największą czterocyfrową liczbę trójkątną.

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień





▷ **Zadanie 10** (7 pkt)

Pole powierzchni całkowitej prawidłowego ostrosłupa trójkątnego równą się $144\sqrt{3}$, a pole jego powierzchni bocznej $96\sqrt{3}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

- [spis treści](#)
- [symbole](#)
- [zgłoś błąd](#)
- [13 kwiecień](#)

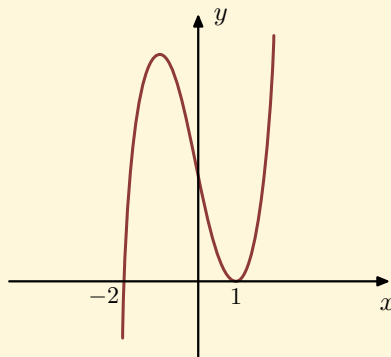




▷ **Zadanie 11** (6 pkt)

Wyznacz wszystkie liczby całkowite k , dla których funkcja $f(x) = x^2 - 2^k \cdot x + 2^k + \frac{5}{4}$ przyjmuje wartości dodatnie dla każdego $x \in \mathbf{R}$.

▷ **Zadanie 12** (5 pkt)



Powyższy rysunek przedstawia fragment wykresu pewnej funkcji wielomianowej $W(x)$ stopnia trzeciego. Jedynymi miejscami zerowymi tego wielomianu są liczby (-2) oraz 1 , a pochodna $W'(-2) = 18$.

- Wyznacz wzór wielomianu $W(x)$.
- Wyznacz równanie prostej stycznej do wykresu tego wielomianu w punkcie o odciętej $x = 3$.





 spis treści


 symbole


 zgłoś błąd


 13 kwiecień


matma235@o2.pl

▷ **Zadanie 13** (5 pkt)

Sporządź wykres funkcji $f(x) = \left| \frac{x-4}{x-2} \right|$, a następnie korzystając z tego wykresu, wyznacz wszystkie wartości parametru k , dla których równanie $\left| \frac{x-4}{x-2} \right| = k$, ma dwa rozwiązania, których iloczyn jest liczbą ujemną.

▷ **Zadanie 14** (4 pkt)

Niech $A, B \subset \Omega$ będą zdarzeniami losowymi, takimi że $P(A) = \frac{5}{12}$ oraz $P(B) = \frac{7}{11}$. Zbadaj, czy zdarzenia A i B są rozłączne.

▷ **Zadanie 15** (5 pkt)

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny postaci: $2, \frac{2}{p-1}, \frac{2}{(p-1)^2}, \frac{2}{(p-1)^3}, \dots$. Wyznacz wszystkie wartości p , dla których granicą ciągu jest liczba:

a) 0.

b) 2.

▷ **Zadanie 16** (7 pkt)

Dane jest równanie postaci $(\cos x - 1) \cdot (\cos x + p + 1) = 0$, gdzie $p \in \mathbf{R}$ jest parametrem.

a) Dla $p = -1$ wypisz wszystkie rozwiązania tego równania należące do przedziału $\langle 0; 5 \rangle$.

b) Wyznacz wszystkie wartości parametru p , dla których dane równanie ma w przedziale $\langle -\pi; \pi \rangle$ trzy różne rozwiązania.



▷ **Zadanie 17** (4 pkt)

W trójkącie prostokątnym ABC ($\angle BCA = 90^\circ$) dane są długości przyprostokątnych: $|BC| = a$ i $|CA| = b$. Dwusieczna kąta prostego tego trójkąta przecina przeciwprostokątną AB w punkcie D . Wykaż, że długość odcinka CD jest równa $\frac{a \cdot b}{a+b} \cdot \sqrt{2}$. Sporządź pomocniczy rysunek uwzględniając podane oznaczenia.

▷ **Zadanie 18** (8 pkt)

Oblicz miary kątów dowolnego czworokąta wpisanego w okrąg o promieniu $R = 5\sqrt{2}$, wiedząc ponadto, że jedna z przekątnych tego czworokąta ma długość 10, zaś iloczyn sinusów wszystkich jego kątów wewnętrznych jest równy $\frac{3}{8}$.

▷ **Zadanie 19** (6 pkt)

Korzystając z zasady indukcji matematycznej, udowodnij, że każda liczba naturalna $n \geq 5$ spełnia nierówność $2^n > n^2 + n - 1$.

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zadanie 1 (4 pkt)

Wielomian $P(x) = x^3 - 21x + 20$ rozłóż na czynniki liniowe, to znaczy zapisz go w postaci iloczynu trzech wielomianów stopnia pierwszego.

Rozwiązanie:

rozkład wielomianu na czynniki

$$\begin{aligned}P(x) &= x^3 - 21x + 20 \\&= x^3 - x - 20x + 20 \\&= x(x^2 - 1) - 20(x - 1) \\&\stackrel{\triangleright}{=} x(x - 1)(x + 1) - 20(x - 1) \\&= (x - 1)(x(x + 1) - 20) \\&= (x - 1)(x^2 + x - 20)\end{aligned}$$

Obliczamy **pierwiastki** wyrażenia $x^2 + x - 20$.

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20) = 1 + 80 = 81$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{81} = 9$$

$$x_1 = \frac{-1 - 9}{2 \cdot 1} = \frac{-10}{2} = -5$$

$$x_2 = \frac{-1 + 9}{2 \cdot 1} = \frac{8}{2} = 4$$

postać iloczynowa: $(x - (-5))(x - 4) = (x + 5)(x - 4)$.

Odp. $P(x) = (x - 1)(x + 5)(x - 4)$.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Zadanie 2 (4 pkt)

W roku 2005 na uroczystości urodzin zapytano jubilata, ile ma lat. Jubilat odpowiedział: „Jeśli swój wiek sprzed 10 lat pomnożę przez swój wiek za 11 lat, to otrzymam rok mojego urodzenia”. Ułóż odpowiednie równanie, rozwiąż je i zapisz, w którym roku urodził się ten jubilat.

Rozwiązanie:

x	– obecny wiek jubilata
$x - 10$	– wiek jubilata 10 lat temu
$x + 11$	– wiek jubilata za 11 lat
$2005 - x$	– rok urodzenia jubilata

$$(x - 10)(x + 11) = 2005 - x$$

$$x^2 + 11x - 10x - 110 = 2005 - x$$

$$x^2 + x - 110 - 2005 + x = 0$$

$$x^2 + 2x - 2115 = 0$$

Obliczamy pierwiastki:

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2115) = 4 + 8460 = 8464 \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{8464} = 92$$

$$x_1 = \frac{-2 - 92}{2 \cdot 1} = \frac{-94}{2} = -47$$

$$x_2 = \frac{-2 + 92}{2 \cdot 1} = \frac{90}{2} = 45$$

Jubilat ma 45 lat i urodził się w roku $2005 - 45 = 1960$.

Odp. Jubilat urodził się w 1960 roku.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zadanie 5 (5 pkt)

Nieskończony ciąg liczbowy (a_n) jest określony wzorem $a_n = 4n - 31$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Wyrazy a_k , a_{k+1} , a_{k+2} danego ciągu (a_n) , wzięte w takim porządku, powiększono: wyraz a_k o 1, wyraz a_{k+1} o 3 oraz wyraz a_{k+2} o 23. W ten sposób otrzymano trzy pierwsze wyrazy pewnego ciągu geometrycznego. Wyznacz k oraz czwarty wyraz tego ciągu geometrycznego.

Rozwiązanie:

$$a_n = 4n - 31$$

$$a_k = 4k - 31$$

$$a_{k+1} = 4(k+1) - 31 = 4k + 4 - 31 = 4k - 27$$

$$a_{k+2} = 4(k+2) - 31 = 4k + 8 - 31 = 4k - 23$$

trzy pierwsze wyrazy ciągu geometrycznego:

$$a_k + 1 = 4k - 31 + 1 = 4k - 30$$

$$a_{k+1} + 3 = 4k - 27 + 3 = 4k - 24$$

$$a_{k+2} + 23 = 4k - 23 + 23 = 4k$$

korzystamy z własności ciągu geometrycznego:

$$(4k - 24)^2 = (4k - 30) \cdot 4k$$

$$16k^2 - 192k + 576 = 16k^2 - 120k$$

$$16k^2 - 192k + 576 - 16k^2 + 120k = 0$$

$$-192k + 576 + 120k = 0$$

$$-72k + 576 = 0$$

$$-72k = -576 \quad / : (-72)$$

$$k = 8$$

dalej



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Dla $k = 8$ trzy pierwsze wyrazy ciągu geometrycznego wynoszą:

$$4k - 30 = 4 \cdot 8 - 30 = 2$$

$$4k - 24 = 4 \cdot 8 - 24 = 8$$

$$4k = 4 \cdot 8 = 32$$

iloraz ciągu geometrycznego:

$$8 = 2 \cdot q$$

$$q = 4$$

czwarty wyraz ciągu geometrycznego: $32 \cdot 4 = 128$.

Odp. $k = 8$, a czwarty wyraz ciągu geometrycznego: 128.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zadanie 6 (4 pkt)

Do szkolnych zawodów szachowych zgłosiło się 16 uczniów, wśród których było dwóch faworytów. Organizatorzy zawodów zamierzają losowo podzielić szachistów na dwie jednakowo liczne grupy eliminacyjne, Niebieską i Żółtą. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że faworyci tych zawodów nie znajdą się w tej samej grupie eliminacyjnej. Końcowy wynik obliczeń zapisz w postaci ułamka nieskracalnego.

Rozwiązanie:

16 uczniów dzielimy na dwie grupy wybierając 8 uczniów do grupy Niebieskiej. Ci co zostaną będą w grupie Żółtej. 8 osób z 16 można wybrać na tyle sposobów:

$$|\Omega| = C_{16}^8 = \binom{16}{8} = \frac{16!}{(16-8)! \cdot 8!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16}{8! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 12870$$

Dwóch faworytów możemy przydzielić do grupy Niebieskiej i Żółtej na 2 sposoby. Pierwszy do Niebieskiej drugi do Żółtej lub odwrotnie. Pozostałych 14 uczniów dzielimy na dwie grupy wybierając 7 uczniów do grupy Niebieskiej. Ci co zostaną będą w grupie Żółtej. W ten sposób możemy wybrać grupy na tyle sposobów:

$$\begin{aligned} |A| &= 2 \cdot C_{14}^7 = 2 \cdot \binom{14}{7} = 2 \cdot \frac{14!}{(14-7)! \cdot 7!} = \\ &= 2 \cdot \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}{7! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 6864 \end{aligned}$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6864}{12870} = \frac{8}{15}$$

Odp. Prawdopodobieństwo, że faworyci zostaną rozdzieleni wynosi $P(A) = \frac{8}{15}$.

$$\frac{x}{x-3}$$

Rozwiązanie:

- a) Wyrażenie w liczniku ułamka zapisujemy w postaci sumy, której jednym ze składników jest wyrażenie z mianownika:

$$\frac{x}{x-3} = \frac{(x-3) + 3}{x-3}$$

- b) Zapisujemy powyższy ułamek w postaci sumy liczby 1 oraz pewnego ułamka:

$$\frac{x-3+3}{x-3} = \frac{x-3}{x-3} + \frac{3}{x-3} = 1 + \frac{3}{x-3}$$

- c) Zauważmy, że ułamek $\frac{3}{x-3}$ jest liczbą całkowitą wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $(x-3)$ jest całkowitym dzielnikiem liczby 3, czyli $(x-3) \in \{-1, 1, -3, 3\}$.

- d) Rozwiązujemy kolejno równania $x-3 = -1$, $x-3 = 1$, $x-3 = -3$, $x-3 = 3$,
i otrzymujemy odpowiedź: liczba postaci $\frac{3}{x-3}$ jest całkowita dla:
 $x = 2$, $x = 4$, $x = 0$, $x = 6$.

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zadanie 8 (5 pkt)

W kwadrat $ABCD$ wpisano kwadrat $EFGH$, jak pokazano na poniższym rysunku. Wiedząc, że $|AB| = 1$ oraz tangens kąta AEH równa się $\frac{2}{5}$, oblicz pole kwadratu $EFGH$.

Rozwiązanie:

Trójkąt AEH jest przystający do trójkąta BFE , dlatego $|EB| = |AH|$.

Jeżeli $|AB| = 1$ i $|AH| = a$ to $|EB| = a$ i $|AE| = 1 - a$.

$$\triangleright \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{1-a}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{a}{1-a}$$

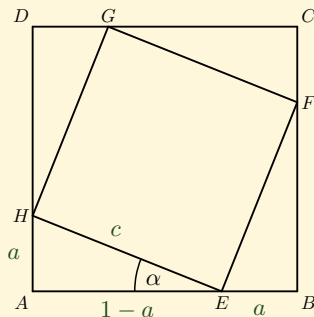
$$2(1-a) = 5a$$

$$2 - 2a = 5a$$

$$7a = 2 \quad / : 7$$

$$a = \frac{2}{7}$$

$$1 - a = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$



Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa:

$$\left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{5}{7}\right)^2 = c^2$$

$$\frac{4}{49} + \frac{25}{49} = c^2$$

$$c^2 = \frac{29}{49}$$

Odp. Pole kwadratu $EFGH$ wynosi $P = \frac{29}{49}$.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zadanie 9 (7 pkt)

Liczbę naturalną t_n nazywamy n -tą liczbą trójkątną, jeżeli jest ona sumą n kolejnych, początkowych liczb naturalnych. Liczbami trójkątnymi są zatem: $t_1 = 1$, $t_2 = 1 + 2 = 3$, $t_3 = 1 + 2 + 3 = 6$, $t_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$, $t_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Stosując tę definicję:

- wyznacz liczbę t_{17} .
- ułóż odpowiednie równanie i zbadaj, czy liczba 7626 jest liczbą trójkątną.
- wyznacz największą czterocyfrową liczbę trójkątną.

Rozwiązanie:

- wyznacz liczbę t_{17} .

$$t_1 = 1$$

$$t_2 = 1 + 2 = 3$$

$$t_3 = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$t_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$t_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$t_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n$$

Ciąg $1, 2, 3, 4, 5, \dots, n$ jest to **ciąg arytmetyczny**, którego suma wynosi:

$$t_n = \frac{1+n}{2} \cdot n \quad n \in \mathbb{N}^+$$

Zatem

$$t_{17} = \frac{1+17}{2} \cdot 17 = 9 \cdot 17 = 153$$

dalej



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



b) ułóż odpowiednie równanie i zbadaj, czy liczba 7626 jest liczbą trójkątną.

$$t_n = \frac{1+n}{2} \cdot n$$

$$\frac{1+n}{2} \cdot n = 7626$$

$$\frac{n+n^2}{2} = 7626 \quad / \cdot 2$$

$$n+n^2 = 15252$$

$$n^2 + n - 15252 = 0$$

Rozwiązujemy **równanie kwadratowe**.

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15252) = 1 + 61008 = 61009$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{61009} = 247$$

$$n_1 = \frac{-1 - 247}{2 \cdot 1} = \frac{-248}{2} = -124$$

$$n_2 = \frac{-1 + 247}{2 \cdot 1} = \frac{246}{2} = 123$$

$n \in \mathbb{N}^+$ dlatego tylko 123 jest poprawnym rozwiązaniem.

Odp. Liczba $t_{123} = 7626$ jest liczbą trójkątną.

dalej



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

c) wyznaczyć największą czterocyfrową liczbę trójkątną.

$$t_n \leq 9999$$

$$\frac{1+n}{2} \cdot n \leq 9999 \quad / \cdot 2$$

$$n + n^2 \leq 19998$$

$$n^2 + n - 19998 \leq 0$$

Rozwiązujemy **nierówność kwadratową**.

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-19998) = 1 + 79992 = 79993$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{79993} \approx 282,8$$

$$n_1 = \frac{-1 - 282,8}{2 \cdot 1} = \frac{-283,8}{2} = -141,9$$

$$n_2 = \frac{-1 + 282,8}{2 \cdot 1} = \frac{281,8}{2} = 140,9$$

$n \in \mathbb{N}^+$, dlatego największą liczbą naturalną spełniającą tę nierówność jest **140**.

$$t_{140} = \frac{1+140}{2} \cdot 140 = \frac{141 \cdot 140}{2} = 9870$$

Odp. Największą czterocyfrową liczbą trójkątną jest $t_{140} = 9870$.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zadanie 10 (7 pkt)

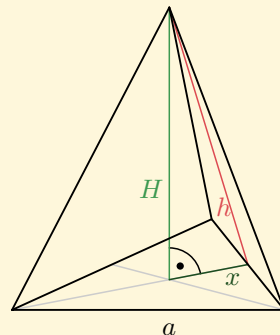
Pole powierzchni całkowitej prawidłowego ostrosłupa trójkątnego równą się $144\sqrt{3}$, a pole jego powierzchni bocznej $96\sqrt{3}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Rozwiązanie:

pole całkowite: $P_c = 144\sqrt{3}$

pole boczne: $P_b = 96\sqrt{3}$

pole podstawy: $P_p = P_c - P_b = 144\sqrt{3} - 96\sqrt{3} = 48\sqrt{3}$



krawędź podstawy: $a = 8\sqrt{3}$

wysokość ściany bocznej: $h = 8$

odcinek w podstawie: $x = 4$

wysokość ostrosłupa: $H = 4\sqrt{3}$

objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 48\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = \frac{1}{3} \cdot 192 \cdot 3 = 192$$

Odp. Objętość ostrosłupa wynosi $V = 192$.



spis treści

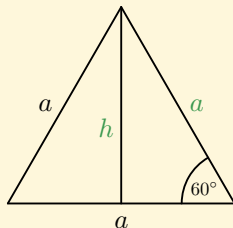
symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Podstawą w ostrosłupie trójkątnym prawidłowym jest trójkąt równoboczny, który ma pole równe $P_p = 48\sqrt{3}$.



$$\triangleright \sin 60^\circ = \frac{h}{a}$$

$$\triangleright \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{a}$$

$$2h = a\sqrt{3} \quad / : 2$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\triangleright P_p = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$$

$$48\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$48\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \quad / \cdot 4$$

$$192\sqrt{3} = a^2\sqrt{3} \quad / : \sqrt{3}$$

$$a = \sqrt{192} = \sqrt{64 \cdot 3}$$

$$a = 8\sqrt{3}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

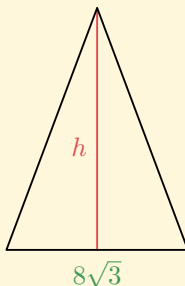
13 kwiecień



W ostrosłupie są trzy ściany o jednakowych polach, zatem pole jednej ściany:

$$P_s = P_b : 3 = 96\sqrt{3} : 3 = 32\sqrt{3}$$

Ściany boczne tego ostrosłupa są trójkątami równoramiennymi.



$$P_s = \frac{1}{2}ah$$

$$32\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot h$$

$$32\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \cdot h$$

$$h = 8$$

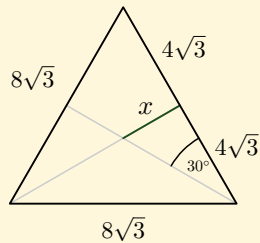


spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$\triangleright \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{x}{4\sqrt{3}}$$

$$\triangleright \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{4\sqrt{3}}$$

$$3x = \sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} \quad / : 3$$

$$x = 4$$





spis treści

symbole

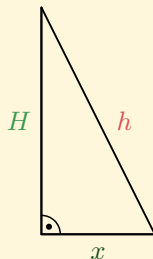
zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

twierdzenie Pitagorasa



$$x^2 + H^2 = h^2$$

$$4^2 + H^2 = 8^2$$

$$H^2 = 64 - 16$$

$$H^2 = 48$$

$$H = \sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3}$$

$$H = 4\sqrt{3}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zadanie 3 (5 pkt)

Funkcja $f(x)$ jest określona wzorem: $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{dla } x \in \langle -1, 1 \rangle \\ -(x - 1)^2 & \text{dla } x \in \langle 1, 3 \rangle \end{cases}$

- Sprawdź, czy liczba $a = (0, 25)^{-0,5}$ należy do dziedziny funkcji $f(x)$.
- Oblicz $f(2)$ oraz $f(3)$.
- Sporządź wykres funkcji $f(x)$.
- Podaj rozwiązanie równania $f(x) = 0$.
- Zapisz zbiór wartości funkcji $f(x)$.

Rozwiązanie:

- Sprawdź, czy liczba $a = (0, 25)^{-0,5}$ należy do dziedziny funkcji $f(x)$.

potęgowanie

$$a = (0, 25)^{-0,5} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

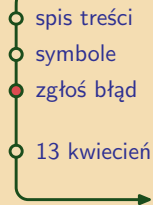
$2 \in \langle 1, 3 \rangle$, dlatego 2 należy do dziedziny funkcji.

- Oblicz $f(2)$ oraz $f(3)$.

$2 \in \langle 1, 3 \rangle$, dlatego $f(2) = -(2 - 1)^2 = -1$.

$3 \in \langle 1, 3 \rangle$, dlatego $f(3) = -(3 - 1)^2 = -2^2 = -4$.

dalej


$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{dla } x \in \langle -1, 1 \rangle \\ -(x - 1)^2 & \text{dla } x \in \langle 1, 3 \rangle \end{cases}$$

punkty:

$(-1, 1)$

$(0, 2)$

$(1, 0)$

$(2, -1)$

$(3, -4)$





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



d) Podaj rozwiązanie równania $f(x) = 0$.

Z wykresu możemy odczytać, że $f(1) = 0$.

e) Zapisz zbiór wartości funkcji $f(x)$.

Z wykresu możemy odczytać zbiór wartości funkcji: $y \in \langle -4, 0 \rangle \cup \langle 1, 3 \rangle$.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zadanie 4 (6 pkt)

W układzie współrzędnych są dane dwa punkty: $A = (-2, 2)$ i $B = (4, 4)$.

- Wyznacz równanie prostej AB .
- Prosta AB oraz prosta o równaniu $9x - 6y - 26 = 0$ przecinają się w punkcie C . Oblicz współrzędne punktu C .
- Wyznacz równanie symetralnej odcinka AB .

Rozwiązanie:

- Wyznacz równanie prostej AB .

Równanie prostej przechodzącej przez punkty $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$:

$$(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$$

dla $A = (-2, 2)$ i $B = (4, 4)$

$$(y - 2)(4 - (-2)) - (4 - 2)(x - (-2)) = 0$$

$$(y - 2) \cdot 6 - 2 \cdot (x + 2) = 0$$

$$6y - 12 - 2x - 4 = 0$$

$$6y - 2x - 16 = 0$$

$$6y = 2x + 16 \quad / : 6$$

$$y = \frac{2}{6}x + \frac{16}{6}$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$$

Odp. Równanie prostej AB : $y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$.

dalej



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

- b) Prosta AB oraz prosta o równaniu $9x - 6y - 26 = 0$ przecinają się w punkcie C .
Oblicz współrzędne punktu C .

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3} \\ 9x - 6y - 26 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3} \\ 9x - 6\left(\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}\right) - 26 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3} \\ 9x - 2x - 16 - 26 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3} \\ 7x = 42 \quad / : 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3} \cdot 6 + \frac{8}{3} \\ x = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 + 2\frac{2}{3} \\ x = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4\frac{2}{3} \\ x = 6 \end{cases}$$

Odp. Punkt C ma współrzędne: $C = (6, 4\frac{2}{3})$

dalej



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

c) Wyznacz równanie symetralnej odcinka AB .

Symetralna odcinka AB musi być prostopadła do AB i przechodzić przez jego środek.

Równanie prostej AB : $y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$.

Szukane równanie: $y = ax + b$.

współczynniki kierunkowe prostych prostopadłych:

$$\frac{1}{3} \cdot a = -1$$

$$a = -3$$

$$y = -3x + b$$

Szukamy współrzędnych środka odcinka AB na podstawie wzoru:

$$S = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

$$A = (-2, 2) \text{ i } B = (4, 4)$$

$$S = \left(\frac{-2 + 4}{2}, \frac{2 + 4}{2} \right)$$

$$S = (1, 3)$$

Podstawiając współrzędne środka odcinka AB do równania $y = -3x + b$ znajdujemy b .

$$3 = -3 \cdot 1 + b$$

$$3 = -3 + b$$

$$b = 6$$

Odp. Równanie symetralnej odcinka AB : $y = -3x + 6$.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zadanie 1 (3 pkt)

W pudełku są trzy kule białe i pięć kul czarnych. Do pudełka można albo dołożyć jedną kulę białą albo usunąć z niego jedną kulę czarną, a następnie wylosować z tego pudełka jedną kulę. W którym z tych przypadków wylosowanie kuli białej jest bardziej prawdopodobne? Wykonaj odpowiednie obliczenia.

Rozwiązanie:

W pierwszym wypadku w pudełku znajdują się 4 kule białe i 5 czarnych. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej:

$$p_1 = \frac{4}{9}$$

W drugim wypadku w pudełku znajdują się 3 kule białe i 4 czarnych. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej:

$$p_2 = \frac{3}{7}$$

Porównujemy oba prawdopodobieństwa, sprowadzając do jednakowego mianownika:

$$p_1 = \frac{4}{9} = \frac{4 \cdot 7}{9 \cdot 7} = \frac{28}{63} \quad p_2 = \frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 9}{7 \cdot 9} = \frac{27}{63}$$

$$p_1 > p_2$$

Odp. Prawdopodobieństwo w pierwszym wypadku jest większe.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Zadanie 2 (4 pkt)

Dany jest ciąg (a_n) , gdzie $a_n = \frac{n+2}{3n+1}$ dla $n = 1, 2, 3 \dots$. Wyznacz wszystkie wyrazy tego ciągu większe od $\frac{1}{2}$

Rozwiązanie:

$$\frac{n+2}{3n+1} > \frac{1}{2} \quad / \cdot 3n+1$$

$3n+1 > 0$ dla $n = 1, 2, 3 \dots$ dlatego nie odwracamy znaku nierówności

$$n+2 > \frac{1}{2}(3n+1) \quad / \cdot 2$$

$$2(n+2) > 3n+1$$

$$2n+4 > 3n+1$$

$$2n-3n > 1-4$$

$$-n > -3 \quad / : (-1)$$

$$n < 3$$

Rozwiązanie nierówności dla $n = 1, 2, 3 \dots$ to $n = 1$ lub $n = 2$

Wyrazy większe od $\frac{1}{2}$:

$$a_1 = \frac{1+2}{3 \cdot 1 + 1} = \frac{3}{4}$$

$$a_2 = \frac{2+2}{3 \cdot 2 + 1} = \frac{4}{7}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Zadanie 3 (4 pkt)

Dany jest wielomian $W(x) = x^3 + kx^2 - 4$

- Wyznacz współczynnik k tego wielomianu wiedząc, że wielomian ten jest podzielny przez dwumian $x + 2$.
- Dla wyznaczonej wartości k rozłóż wielomian na czynniki i podaj wszystkie jego pierwiastki.

Rozwiązanie:

- Wyznacz współczynnik k tego wielomianu wiedząc, że wielomian ten jest podzielny przez dwumian $x + 2$.

Zgodnie z **twierdzeniem Bézout** jeżeli wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $x + 2$ to -2 jest **pierwiastkiem** tego wielomianu, czyli:

$$W(-2) = 0$$

$$(-2)^3 + k(-2)^2 - 4 = 0$$

$$-8 + 4k - 4 = 0$$

$$4k = 12 \quad / : 4$$

$$k = 3$$

dalej



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

b) Dla wyznaczonej wartości k rozłóż wielomian na czynniki i podaj wszystkie jego pierwiastki.

dzielimy wielomian:

$$\begin{array}{r}
 (x^3+3x^2-4) : (x+2) = x^2+x-2 \\
 \underline{-x^3-2x^2} \\
 -x^2-2x \\
 \underline{-x^2-2x} \\
 0 \\
 \underline{2x+4} \\
 0
 \end{array}$$

$$W(x) = (x+2)(x^2+x-2)$$

Znajdujemy **pierwiastki** wielomianu: x^2+x-2 .

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$$

$$x_1 = \frac{-1-3}{2 \cdot 1} = \frac{-4}{2} = -2 \qquad x_2 = \frac{-1+3}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$$

postać iloczynowa: $(x - (-2))(x - 1) = (x+2)(x-1)$.

$$W(x) = (x+2)(x+2)(x-1) = (x+2)^2(x-1)$$

Odp. $W(x) = (x+2)^2(x-1)$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zadanie 4 (5 pkt)

Na trzech półkach ustawiono 76 płyt kompaktowych. Okazało się, że liczby płyt na półkach górnej, środkowej i dolnej tworzą rosnący ciąg geometryczny. Na środkowej półce stoją 24 płyty. Oblicz, ile płyt stoi na półce górnej, a ile płyt stoi na półce dolnej.

Rozwiązanie:

x — liczba płyt ustawionych na górnej półce

24 — liczba płyt ustawionych na środkowej półce

$q = \frac{24}{x}$ — iloraz ciągu geometrycznego

$24 \cdot \frac{24}{x}$ — liczba płyt ustawionych na dolnej półce

$$x + 24 + 24 \cdot \frac{24}{x} = 76$$

$$x + 24 + \frac{576}{x} = 76 \quad / \cdot x$$

$$x^2 + 24x + 576 = 76x$$

$$x^2 + 24x - 76x + 576 = 0$$

$$x^2 - 52x + 576 = 0$$

Znajdujemy **pierwiastki** wielomianu: $x^2 - 52x + 576$

$$\Delta = (-52)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 576 = 2704 - 2304 = 400$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{400} = 20$$

$$x_1 = \frac{52 - 20}{2 \cdot 1} = \frac{32}{2} = 16$$

$$x_2 = \frac{52 + 20}{2 \cdot 1} = \frac{72}{2} = 36$$

Odp. Jeżeli liczby płyt mają tworzyć rosnący ciąg geometryczny możliwe jest tylko jedno rozwiązanie: górna – 16, środkowa – 24, dolna – $24 \cdot \frac{24}{16} = 36$.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zadanie 5 (4 pkt)

Sklep sprowadza z hurtowni kurtki płacąc po 100 zł za sztukę i sprzedaje średnio 40 sztuk miesięcznie po 160 zł. Zaobserwowano, że każda kolejna obniżka ceny sprzedaży kurtki o 1 zł zwiększa sprzedaż miesięczną o 1 sztukę. Jaką cenę kurtki powinien ustalić sprzedawca, aby jego miesięczny zysk był największy?

Rozwiązanie:

$$\begin{array}{ll} 160 - 100 = 60 & \text{– zysk na jednej kurtce} \\ x & \text{– o tyle złotych obniżono cenę kurtki} \\ 60 - x & \text{– cena kurtki po obniżce} \\ 40 + x & \text{– tyle kurtek sprzedaje sklep po obniżce o } x \text{ zł} \\ (40 + x)(60 - x) & \text{– tyle miesięcznie zarabia sklep po zmianie ceny} \end{array}$$

Przychód sklepu opisuje funkcja:

$$\begin{aligned} f(x) &= (40 + x)(60 - x) \\ f(x) &= 6400 - 40x + 60x - x^2 \\ f(x) &= -x^2 + 20x + 6400 \end{aligned}$$

Wykres tej funkcji to parabola z ramionami skierowanymi w dół. Największą wartość osiąga w wierzchołku dla $x_w = \frac{-b}{2a}$.

$$x_w = \frac{-20}{2 \cdot (-1)} = 10$$

Odp O 10 zł należy obniżyć cenę kurtki, a więc jej cena wyniesie 150 zł.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zadanie 6 (6 pkt)

Dane są zbiory liczb rzeczywistych:

$$A = \{x : |x + 2| < 3\}$$

$$B = \{x : (2x - 1)^3 \leq 8x^3 - 13x^2 + 6x + 3\}$$

Zapisz w postaci przedziałów liczbowych zbiory A , B , $A \cap B$, oraz $B - A$.

Rozwiązanie:

$$A = \{x : |x + 2| < 3\}$$

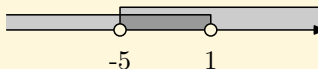
$$|x + 2| < 3$$

Nierówność z **wartością bezwzględną** można zastąpić układem nierówności bez wartości bezwzględnej.

$$x + 2 < 3 \quad \text{ i } \quad x + 2 > -3$$

$$x < 3 - 2 \quad \quad x > -3 - 2$$

$$x < 1 \quad \quad x > -5$$



Rozwiązaniem jest **część wspólna** przedziałów:

$$A = (-5, 1)$$

dalej



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

$$B = \{x : (2x - 1)^3 \leq 8x^3 - 13x^2 + 6x + 3\}$$

rozwiązujemy nierówność kwadratową:

$$(2x - 1)^3 \leq 8x^3 - 13x^2 + 6x + 3$$

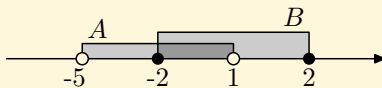
$$\triangleright 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 \leq 8x^3 - 13x^2 + 6x + 3$$

$$8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 - 8x^3 + 13x^2 - 6x - 3 \leq 0$$

$$x^2 - 4 \leq 0$$

$$\triangleright (x - 2)(x + 2) \leq 0$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = -2$$



$$B = \langle -2, 2 \rangle$$

część wspólna: $A \cap B = \langle -2, 1 \rangle$

różnica: $B - A = \langle 1, 2 \rangle$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

▷ Zadanie 7 (5 pkt)

W poniższej tabeli przedstawiono wyniki sondażu przeprowadzonego w grupie uczniów, dotyczącego czasu przeznaczonego dziennie na przygotowywanie zadań domowych.

Czas (w godzinach)	1	2	3	4
Liczba uczniów	5	10	15	10

a) Naskikuj diagram słupkowy ilustrujący wyniki tego sondażu.



dalej



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

b) Oblicz średnią liczbę godzin, jaką uczniowie przeznaczają dziennie na przygotowanie zadań domowych.

Liczba wszystkich uczniów:

$$5 + 10 + 15 + 10 = 40$$

Łączna liczba godzin przeznaczonych na naukę przez wszystkich uczniów:

$$5 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 15 \cdot 3 + 10 \cdot 4 = 110$$

Średnia liczba godzin: $\bar{a} = \frac{110}{40} = 2,75$

c) Oblicz wariancję i odchylenie standardowe czasu przeznaczanego dziennie na przygotowanie zadań domowych. Wynik podaj z dokładnością do 0,01.

Wariancja:

$$\sigma^2 = \frac{5 \cdot (1 - 2,75)^2 + 10 \cdot (2 - 2,75)^2 + 15 \cdot (3 - 2,75)^2 + 10 \cdot (4 - 2,75)^2}{40}$$

$$\sigma^2 = \frac{15,3125 + 5,625 + 0,9375 + 15,625}{40}$$

$$\sigma^2 = \frac{37,5}{40} = 0,9375 \approx 0,94$$

Odchylenie standardowe:

$$\sigma = \sqrt{0,9375} \approx 0,97$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zadanie 8 (6 pkt)

Z kawałka materiału o kształcie i wymiarach czworokąta $ABCD$ (patrz na rysunek obok) wycięto okrągłą serwetkę o promieniu 3 dm. Oblicz, ile procent całego materiału stanowi jego niewykorzystana część. Wynik podaj z dokładnością 0,01 procenta.

Rozwiązanie:

1. Liczymy pole czworokąta:

Oznaczamy długości boków literami a , b , c , d .

Dzielimy czworokąt na cztery trójkąty, w których **wysokości** to promienie okręgu. Pole czworokąta jest równe sumie **pól trójkątów**:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}dr = \frac{1}{2}r(a + b + c + d)$$

Czworokąt jest opisany na okręgu, jeżeli suma jego przeciwległych boków jest równa. Czyli $c + d = a + b = 6,3 + 10 = 16,3$ dm.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}r(a + b + a + b) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (16,3 + 16,3) = 48,9 \text{ dm}^2$$

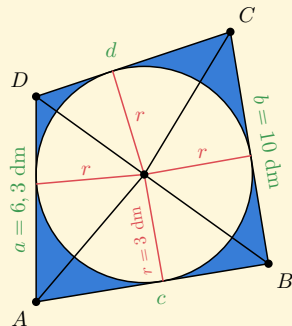
2. Liczymy pole koła:

$$S_k = \pi \cdot 3^2 = 3,14 \cdot 9 = 28,26 \text{ dm}^2$$

3. Liczymy pole niewykorzystanej części:

$$S_{ABCD} - S_k = 48,9 - 28,26 = 20,64 \text{ dm}^2$$

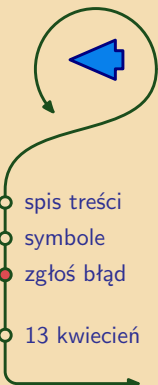
dalej



4. Liczymy, ile procent przypada na niewykorzystaną część:

$$\frac{S_{ABCD} - S_k}{S_{ABCD}} = \frac{20,64 \text{ dm}^2}{48,9 \text{ dm}^2} \cdot 100\% \approx 42,21\%$$

Odp. Niewykorzystana część stanowi 42,21% całego materiału.

- 
- spis treści
 - symbole
 - zgłoś błąd
 - 13 kwietnia





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zadanie 9 (6 pkt)

Rodzeństwo w wieku 8 i 10 lat otrzymało razem w spadku 84100 zł. Kwotę tę złożono w banku, który stosuje kapitalizację roczną przy rocznej stopie procentowej 5%. Każde z dzieci otrzyma swoją część spadku z chwilą osiągnięcia 21 lat. Życzeniem spadkodawcy było takie podzielenie kwoty spadku, aby w przyszłości obie wypłacone części spadku zaokrąglone do 1 zł były równe. Jak należy podzielić kwotę 84100 zł między rodzeństwo? Zapisz wszystkie wykonane obliczenia.

Rozwiązanie:

Korzystamy ze wzoru na kapitalizację odsetek.

$$p = 5\% = \frac{5}{100} = 0,05 \quad \text{— procent dopisywany co rok}$$

$$x \quad \text{— kwota wpłacona dla ośmioletniego dziecka}$$

$$21 - 8 = 13 \quad \text{— tyle lat zostało ośmiolatkowi do 21}$$

$$x \cdot (1 + 0,05)^{13} \quad \text{— tyle otrzyma w wieku 21 lat}$$

$$84100 - x \quad \text{— kwota wpłacona dla dziesięcioletniego dziecka}$$

$$21 - 10 = 11 \quad \text{— tyle lat zostało dziesięciolatkowi do 21}$$

$$(84100 - x) \cdot (1 + 0,05)^{11} \quad \text{— tyle otrzyma w wieku 21 lat}$$

W wieku 21 lat dzieci mają dostać tyle samo:

$$x \cdot (1 + 0,05)^{13} = (84100 - x) \cdot (1 + 0,05)^{11}$$

$$x \cdot 1,05^{13} = (84100 - x) \cdot 1,05^{11} \quad / : 1,05^{11}$$

$$x \cdot 1,05^{11} = 84100 - x$$

$$x \cdot 1,1025 + x = 84100$$

$$2,1025x = 84100 \quad / : 2,1025$$

$$x = 40000$$

$$84100 - 40000 = 44100$$

Odp. Dla ośmiolatka należy wpłacić 40000 zł, a dla dziesięciolatka 44100 zł.



spis treści
symbole
zgłoś błąd
13 kwiecień

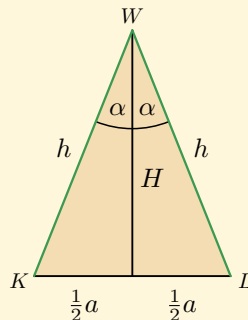
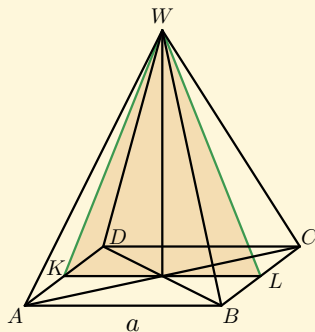


matma235@o2.pl

Zadanie 10 (7 pkt)

W ostrosłupie czworokątnym prawidłowym wysokości przeciwległych ścian bocznych poprowadzone z wierzchołka ostrosłupa mają długości h i tworzą kąt o mierze 2α . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Rozwiązanie:



wysokości ścian bocznych: $|KW| = |LW| = h$

$$\triangleright \sin \alpha = \frac{\frac{1}{2}a}{h} \quad / \cdot h$$

$$\frac{1}{2}a = h \sin \alpha \quad / \cdot 2$$

$$a = 2h \sin \alpha$$

$$\triangleright \cos \alpha = \frac{H}{h} \quad / \cdot h$$

$$H = h \cos \alpha$$

Ostrosłup prawidłowy czworokątny ma w podstawie kwadrat, którego długość boku policzyliśmy: $a = 2h \sin \alpha$. Pole podstawy: $P_p = a^2 = (2h \sin \alpha)^2 = 4h^2 \sin^2 \alpha$

Objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 4h^2 \sin^2 \alpha \cdot h \cos \alpha = \frac{4}{3} h^3 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha$$



▷ **Zadanie 1** (3 pkt)

Dane są liczby: $a = \frac{3\sqrt{3}-4}{1+2\sqrt{3}}$ i $b = \sqrt{27} \cdot \frac{(\frac{1}{9})^3}{3^{-5}}$

- Przedstaw liczbę a w postaci $x + y\sqrt{3}$, gdzie x i y są liczbami wymiernymi.
- Zapisz liczbę b w postaci potęgi liczby 3 o wykładniku ułamkowym.
- Suma liczb a i b stanowi 80% pewnej liczby c . Wyznacz liczbę c .

▷ **Zadanie 2** (3 pkt)

Po *Wiadomościach z kraju i ze świata* telewizja TVG ma nadać pięć reklam: trzy reklamy różnych proszków do prania oraz dwie reklamy różnych past do zębów. Kolejność nadawania reklam jest ustalona losowo. Oblicz prawdopodobieństwo, że dwie reklamy produktów tego samego rodzaju nie będą nadane bezpośrednio jedna po drugiej. Wynik podaj w postaci nieskracalnego ułamka zwykłego.

▷ **Zadanie 3** (3 pkt)

Dana jest funkcja $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ określona wzorem $f(x) = ax + 4$.

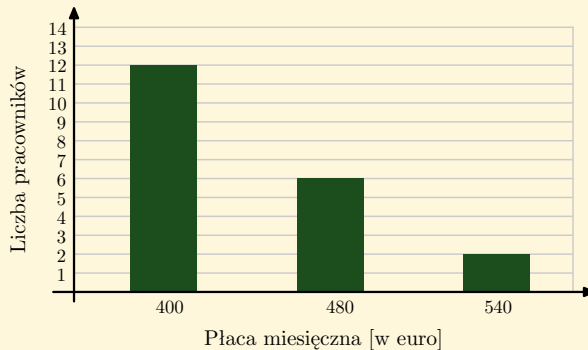
- Wyznacz wartość a , dla której miejscem zerowym funkcji f jest liczba -1 .
- Wyznacz wartość a , dla której prosta będąca wykresem funkcji f jest nachylona do osi OX pod kątem 60° .
- Wyznacz wartość a , dla której równanie $ax + 4 = 2a + 4$ ma nieskończenie wiele rozwiązań.





▷ Zadanie 4 (4 pkt)

W pewnej firmie pracownicy zostali zaszeregowani do trzech grup uposażeń. Liczbę pracowników i płace (w euro) w poszczególnych grupach przedstawia diagram słupkowy:



- Wyznacz średnią płacę miesięczną w tej firmie.
- Oblicz wariancję i odchylenie standardowe miesięcznej płacy w tej firmie. Odchylenie standardowe podaj z dokładnością do 0,1.





▷ Zadanie 5 (3 pkt)

Zauważ, że:

$$1^2 = 1$$

$$2^2 = 1 + 2 + 1$$

$$3^2 = 1 + 2 + 3 + 2 + 1$$

$$4^2 = 1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1$$

Stosując wzór na sumę kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego uzasadnij, że:

$$n^2 = 1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + n + (n - 1) + \dots + 3 + 2 + 1$$

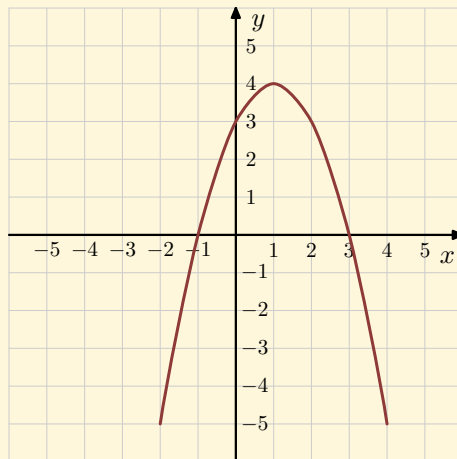
- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień





▷ **Zadanie 6** (6 pkt)

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji kwadratowej f . Na podstawie wykresu



- zapisz w postaci sumy przedziałów liczbowych zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \leq 3$,
- określ i zapisz największą i najmniejszą wartość funkcji f w przedziale $\langle 0, 3 \rangle$,
- zapisz wzór funkcji f w postaci iloczynowej.





▷ **Zadanie 7** (6 pkt)

Dany jest ciąg (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{5-3n}{7} \quad n = 1, 2, 3, \dots$

- Sprawdź na podstawie definicji, czy ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.
- Oblicz, dla jakiej wartości x liczby a_4 , $x^2 + 2$, a_{11} są kolejnymi wyrazami tego samego ciągu geometrycznego.

▷ **Zadanie 8** (6 pkt)

Wysokość walca jest o 6 większa od średnicy jego podstawy, a pole jego powierzchni całkowitej jest równe 378π . Oblicz objętość walca.

▷ **Zadanie 9** (8 pkt)

Dane są zbiory liczb rzeczywistych: $A = \left\{ x : \frac{3}{x} \leq 1 \right\}$ i $B = \{ x : |x+1| < 3 \}$.

- Zaznacz te zbiory na osi liczbowej
- Przedstaw zbiory $A \cup B$ i $A \setminus B$ w postaci sumy przedziałów liczbowych.

▷ **Zadanie 10** (8 pkt)

W trapezie opisanym na okręgu kąty przy dłuższej podstawie mają miary 60° i 30° , a długość wysokości tego trapezu jest równa 6. Sporządź odpowiedni rysunek i oznacz jego elementy. Oblicz pole trapezu oraz długość jego podstaw.

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Zadanie 1 (3 pkt)

Dane są liczby: $a = \frac{3\sqrt{3} - 4}{1 + 2\sqrt{3}}$ i $b = \sqrt{27} \cdot \frac{(\frac{1}{9})^3}{3^{-5}}$

- Przedstaw liczbę a w postaci $x + y\sqrt{3}$, gdzie x i y są liczbami wymiernymi.
- Zapisz liczbę b w postaci potęgi liczby 3 o wykładniku ułamkowym.
- Suma liczb a i b stanowi 80% pewnej liczby c . Wyznacz liczbę c .

Rozwiązanie:

- Przedstaw liczbę a w postaci $x + y\sqrt{3}$, gdzie x i y są liczbami wymiernymi.

$$\begin{aligned} a &= \frac{3\sqrt{3} - 4}{1 + 2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3} - 4}{1 + 2\sqrt{3}} \cdot \frac{1 - 2\sqrt{3}}{1 - 2\sqrt{3}} \stackrel{\triangleright}{=} \frac{(3\sqrt{3} - 4)(1 - 2\sqrt{3})}{1 - (2\sqrt{3})^2} = \\ &= \frac{3\sqrt{3} - 6 \cdot 3 - 4 + 8\sqrt{3}}{1 - 4 \cdot 3} = \frac{-22 + 11\sqrt{3}}{-11} = \frac{-22}{-11} + \frac{11\sqrt{3}}{-11} = 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

- Zapisz liczbę b w postaci potęgi liczby 3 o wykładniku ułamkowym.

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{27} \cdot \frac{(\frac{1}{9})^3}{3^{-5}} \stackrel{\triangleright}{=} \sqrt{9 \cdot 3} \cdot \frac{(9^{-1})^3}{3^{-5}} = 3\sqrt{3} \cdot \frac{(3^2)^{-3}}{3^{-5}} = 3\sqrt{3} \cdot \frac{3^{-6}}{3^{-5}} = \\ &= 3\sqrt{3} \cdot 3^{-6-(-5)} = 3\sqrt{3} \cdot 3^{-1} = 3\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} = \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

dalej



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



c) Suma liczb a i b stanowi 80% pewnej liczby c . Wyznacz liczbę c .

$$a + b = 2 - \sqrt{3} + 3^{\frac{1}{2}} = 2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2$$

$$80\% \text{ z } c = 2$$

$$\frac{80}{100} \cdot c = 2$$

$$\frac{8}{10} \cdot c = 2 \quad / : \frac{8}{10}$$

$$c = 2 \cdot \frac{10}{8}$$

$$c = \frac{20}{8}$$

$$c = 2,5$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zadanie 2 (3 pkt)

Po *Wiadomościach z kraju i ze świata* telewizja TVG ma nadać pięć reklam: trzy reklamy różnych proszków do prania oraz dwie reklamy różnych past do zębów. Kolejność nadawania reklam jest ustalona losowo. Oblicz prawdopodobieństwo, że dwie reklamy produktów tego samego rodzaju nie będą nadane bezpośrednio jedna po drugiej. Wynik podaj w postaci nieskracalnego ułamka zwykłego.

Rozwiązanie:

Na tyle sposobów można nadać pięć reklam w dowolnej kolejności:

$$\overline{\Omega} = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

Warunki zadania będą spełnione tylko wtedy, jeżeli reklamy będą nadawane w następującej kolejności:

proszek – pasta – proszek – pasta – proszek

W powyższym zestawie reklamy proszków można ustawić na $3!$ sposobów, a reklamy pasty na $2!$ sposobów. Zatem cały ciąg pięciu reklam można wyemitować na tyle sposobów:

$$\overline{A} = 3! \cdot 2! = 6 \cdot 2 = 12$$

Prawdopodobieństwo takiej sytuacji:

$$P(A) = \frac{12}{120} = \frac{1}{10}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Zadanie 3 (3 pkt)

Dana jest funkcja $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ określona wzorem $f(x) = ax + 4$.

- Wyznacz wartość a , dla której miejscem zerowym funkcji f jest liczba -1 .
- Wyznacz wartość a , dla której prosta będąca wykresem funkcji f jest nachylona do osi OX pod kątem 60° .
- Wyznacz wartość a , dla której równanie $ax + 4 = 2a + 4$ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Rozwiązanie:

- Wyznacz wartość a , dla której **miejscem zerowym** funkcji f jest liczba -1 .

$$0 = a \cdot (-1) + 4$$

$$0 = -a + 4$$

$$a = 4$$

- Wyznacz wartość a , dla której prosta będąca wykresem funkcji f jest nachylona do osi OX pod kątem 60° .

Współczynnik kierunkowy a funkcji liniowej $y = ax + b$ jest równy $\operatorname{tg} \alpha$, gdzie α jest kątem pod jakim wykreś funkcji liniowej jest nachylony do osi OX .

$$a = \operatorname{tg} 60^\circ \stackrel{\Delta}{=} \sqrt{3}$$

dalej



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



c) Wyznacz wartość a , dla której równanie $ax + 4 = 2a + 4$ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

$$ax + 4 = 2a + 4$$

$$ax - 2a = 4 - 4$$

$$a(x - 2) = 0$$

Dla $a = 0$ nie ma znaczenia co wstawimy za x , bo iloczyn i tak będzie równy zero. Zatem dla $a = 0$ równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

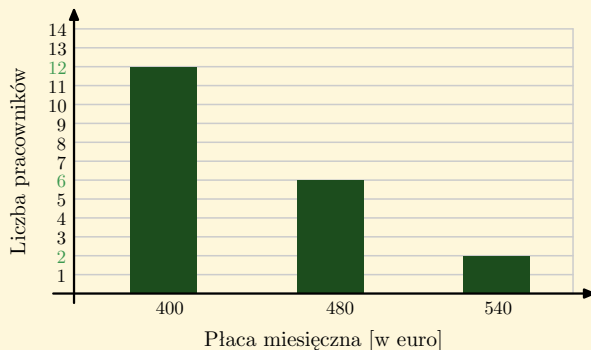
13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zadanie 4 (4 pkt)

W pewnej firmie pracownicy zostali zaseregowani do trzech grup uposażeń. Liczbę pracowników i płace (w euro) w poszczególnych grupach przedstawia diagram słupkowy:



- Wyznacz średnią płacę miesięczną w tej firmie.
- Oblicz wariancję i odchylenie standardowe miesięcznej płacy w tej firmie. Odchylenie standardowe podaj z dokładnością do 0,1.

Rozwiązanie:

- Wyznacz średnią płacę miesięczną w tej firmie.

Liczba wszystkich pracowników

$$12 + 6 + 2 = 20$$

Suma wszystkich wypłat (ilość pieniędzy, które idą na wypłaty):

$$12 \cdot 400 + 6 \cdot 480 + 2 \cdot 540 = 8760$$

$$\text{Średnia płaca miesięczna: } a = \frac{8760}{20} = 438$$

dalej



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



b) Oblicz wariancję i odchylenie standardowe miesięcznej płacy w tej firmie. Odchylenie standardowe podaj z dokładnością do 0,1.

Wariancja:

$$\sigma^2 = \frac{12 \cdot (400 - 438)^2 + 6 \cdot (480 - 438)^2 + 2 \cdot (540 - 438)^2}{20} =$$

$$\sigma^2 = \frac{17328 + 10584 + 20808}{20} =$$

$$\sigma^2 = \frac{48720}{20} \approx 2436$$

Odchylenie standardowe:

$$\sigma = \sqrt{2436} \approx 49,4$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zadanie 5 (3 pkt)

Zauważ, że:

$$1^2 = 1$$

$$2^2 = 1 + 2 + 1$$

$$3^2 = 1 + 2 + 3 + 2 + 1$$

$$4^2 = 1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1$$

Stosując wzór na sumę kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego uzasadnij, że:

$$n^2 = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n + (n-1) + \dots + 3 + 2 + 1$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że: $1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = (n-1) + \dots + 3 + 2 + 1$, czyli prawą stronę równania (P), możemy zapisać krócej:

$$P = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)) + n$$

W nawiasie jest **ciąg arytmetyczny** o $n-1$ wyrazach, którego sumę możemy **policzyć**:

$$P = 2 \cdot \frac{1 + (n-1)}{2} \cdot (n-1) + n$$

$$P = 2 \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2} + n$$

$$P = \frac{2(n^2 - n)}{2} + \frac{2n}{2}$$

$$P = \frac{2n^2 - 2n + 2n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2$$

Czyli prawa strona równania równa się lewej.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

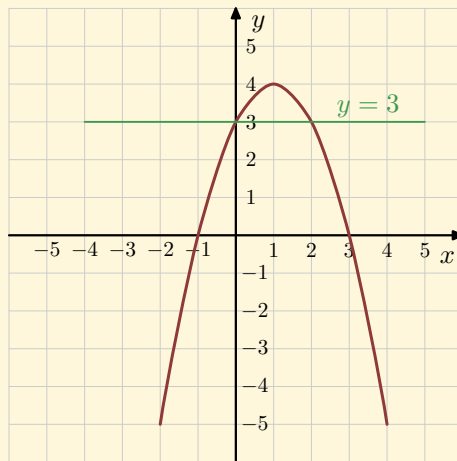


matma235@o2.pl

Zadanie 6 (6 pkt)

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji kwadratowej f . Na podstawie wykresu

a) zapisz w postaci sumy przedziałów liczbowych zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \leq 3$

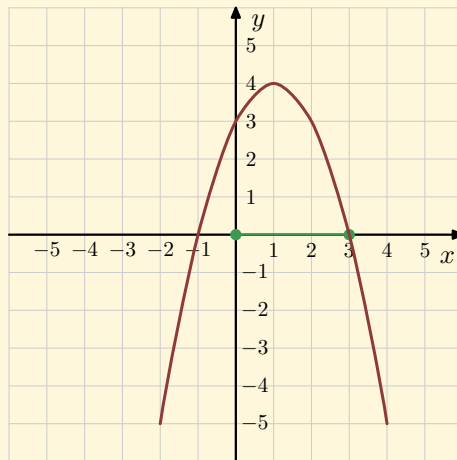


Rozwiązaniem są x odpowiadające punktom poniżej prostej $y = 3$ czyli

$$x \in (-\infty, 0) \cup \langle 2, \infty)$$

dalej

b) określ i zapisz największą i najmniejszą wartość funkcji f w przedziale $\langle 0, 3 \rangle$



W przedziale $\langle 0, 3 \rangle$ największa wartość to 4 a najmniejsza to 0.

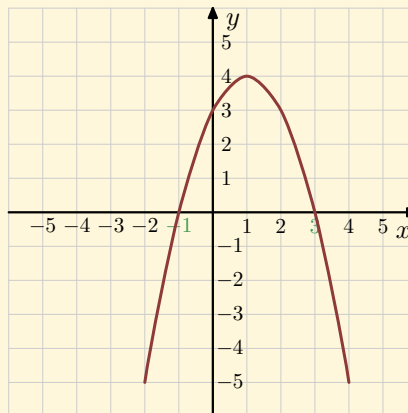
[dalej](#)





matma235@o2.pl

c) zapisz wzór funkcji f w postaci iloczynowej.



miejsca zerowe funkcji to: $x_1 = -1$ $x_2 = 3$

postać iloczynowa:

$$f(x) = a(x - (-1))(x - 3)$$

$$f(x) = a(x + 1)(x - 3)$$

Wykres zawiera np. punkt $(1, 4)$. Dzięki jemu obliczymy współczynnik a :

$$4 = a(1 + 1)(1 - 3)$$

$$4 = a \cdot 2 \cdot (-2) \quad / : (-4)$$

$$a = -1$$

Odp. Postać iloczynowa funkcji: $y = -(x + 1)(x - 3)$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



▷ Zadanie 7 (6 pkt)

Dany jest ciąg (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{5-3n}{7}$ $n = 1, 2, 3, \dots$

- Sprawdź na podstawie definicji, czy ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.
- Oblicz, dla jakiej wartości x liczby a_4 , $x^2 + 2$, a_{11} są kolejnymi wyrazami tego samego ciągu geometrycznego.

Rozwiązanie:

- Sprawdź na podstawie definicji, czy ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

definicja ciągu arytmetycznego

$$a_n = \frac{5-3n}{7} \quad a_{n+1} = \frac{5-3(n+1)}{7}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{5-3(n+1)}{7} - \frac{5-3n}{7} = \frac{5-3(n+1) - (5-3n)}{7} = \\ &= \frac{5-3n-3-5+3n}{7} = -\frac{3}{7} \end{aligned}$$

dalej



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

b) Oblicz, dla jakiej wartości x liczby a_4 , $x^2 + 2$, a_{11} są kolejnymi wyrazami tego samego ciągu geometrycznego.

$$a_n = \frac{5 - 3n}{7}$$

$$a_4 = \frac{5 - 3 \cdot 4}{7} = \frac{5 - 12}{7} = -1 \quad a_{11} = \frac{5 - 3 \cdot 11}{7} = \frac{5 - 33}{7} = -4$$

Korzystamy z własności ciągu geometrycznego.

$$(x^2 + 2)^2 = a_4 \cdot a_{11}$$

$$(x^2 + 2)^2 = -1 \cdot (-4)$$

$$(x^2 + 2)^2 = 4$$

$$(x^2 + 2)^2 = 4$$

$$x^2 + 2 = 2$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

lub

$$x^2 + 2 = -2$$

$$x^2 = -4$$

nie ma rozwiązania

Odp. Dla $x = 0$ liczby a_4 , $x^2 + 2$, a_{11} tworzą ciąg geometryczny.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

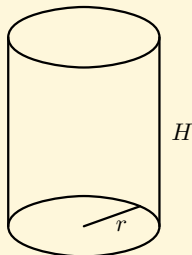


matma235@o2.pl

Zadanie 8 (6 pkt)

Wysokość walca jest o 6 większa od średnicy jego podstawy, a pole jego powierzchni całkowitej jest równe 378π . Oblicz objętość walca.

Rozwiązanie:



$2r$

$$H = 2r + 6$$

$$P_c = 2\pi r^2 + 2\pi rH$$

- średnica podstawy
- wysokość jest o 6 większa od średnicy podstawy
- pole powierzchni całkowitej

$$378\pi = 2\pi r^2 + 2\pi rH$$

$$378\pi = 2\pi r^2 + 2\pi r(2r + 6) \quad / : \pi$$

$$378 = 2r^2 + 4r^2 + 12r$$

$$0 = 6r^2 + 12r - 378 \quad / : 6$$

$$0 = r^2 + 2r - 63$$

dalej



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$r^2 + 2r - 63 = 0$$

Obliczamy pierwiastki:

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-63) = 4 + 252 = 256 \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{256} = 16$$

$$r_1 = \frac{-2 - 16}{2 \cdot 1} = \frac{-18}{2} = -9 \qquad r_2 = \frac{-2 + 16}{2 \cdot 1} = \frac{14}{2} = 7$$

Tylko rozwiązanie $r_2 = 7$ jest poprawne (długość musi być dodatnia).

$$H = 2r + 6$$

$$H = 2 \cdot 7 + 6$$

$$H = 20$$

Objętość walca:

$$V = \pi r^2 \cdot H$$

$$V = \pi \cdot 7^2 \cdot 20$$

$$V = 980\pi$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zadanie 9 (8 pkt)

Dane są zbiory liczb rzeczywistych: $A = \left\{x : \frac{3}{x} \leq 1\right\}$ i $B = \{x : |x + 1| < 3\}$.

- a) Zaznacz te zbiory na osi liczbowej
b) Przedstaw zbiory $A \cup B$ i $A \setminus B$ w postaci sumy przedziałów liczbowych.

Rozwiązanie:

- a) Zaznacz te zbiory na osi liczbowej

$$A = \left\{x : \frac{3}{x} \leq 1\right\}$$

$$\frac{3}{x} \leq 1$$

$$\frac{3}{x} - 1 \leq 0$$

$$\frac{3}{x} - \frac{x}{x} \leq 0$$

$$\frac{3-x}{x} \leq 0$$

dziedzina: $x \neq 0$

zamiast ułamka możemy napisać iloczyn.

$$(3-x)x \leq 0$$

dla $x \neq 0$

dalej



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

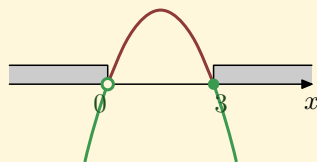


matma235@o2.pl

Rozwiązujemy **nierówność kwadratową**.

$$(3 - x)x \leq 0 \quad \text{dla } x \neq 0$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = 0$$



rozwiązaniem jest **suma** dwóch **przedziałów**: $A = (-\infty, 0) \cup (3, \infty)$

$$B = \{x : |x + 1| < 3\}$$

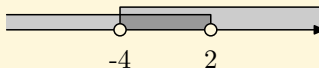
$$|x + 1| < 3$$

Nierówność z **wartością bezwzględną** można zastąpić układem nierówności bez wartości bezwzględnej.

$$x + 1 < 3 \quad \text{ i } \quad x + 1 > -3$$

$$x < 3 - 1 \quad x > -3 - 1$$

$$x < 2 \quad x > -4$$



Rozwiązaniem jest **część wspólna** przedziałów:

$$B = (-4, 2)$$

dalej



spis treści

symbole

zgłoś błąd

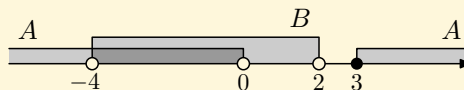
13 kwiecień



matma235@o2.pl

$$A = (-\infty, 0) \cup \langle 3, \infty)$$

$$B = (-4, 2)$$



b) Przedstaw zbiory $A \cup B$ i $A \setminus B$ w postaci sumy przedziałów liczbowych.

Z rysunku odczytujemy rozwiązanie:

suma: $A \cup B = (-\infty, 2) \cup \langle 3, \infty)$

różnica: $A \setminus B = (-\infty, -4) \cup \langle 3, \infty)$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



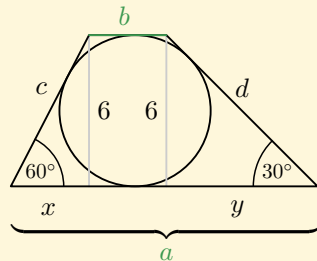
matma235@o2.pl

Zadanie 10 (8 pkt)

W trapezie opisanym na okręgu kąty przy dłuższej podstawie mają miary 60° i 30° , a długość wysokości tego trapezu jest równa 6. Sporządź odpowiedni rysunek i oznacz jego elementy. Oblicz pole trapezu oraz długość jego podstaw.

Rozwiązanie:

$$\text{Pole trapezu: } P = \frac{(a+b)h}{2}$$



Czworokąt jest opisany na okręgu, jeżeli suma jego przeciwległych boków jest równa. Czyli $a + b = c + d$.

$$\triangleright \sin 60^\circ = \frac{6}{c}$$

$$\triangleright \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{c} \quad / \cdot c$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot c = 6 \quad / : \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$c = 6 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$c = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$$

$$a + b = c + d = 4\sqrt{3} + 12$$

$$\triangleright \sin 30^\circ = \frac{6}{d}$$

$$\triangleright \frac{1}{2} = \frac{6}{d} \quad / \cdot d$$

$$\frac{1}{2} \cdot d = 6 \quad / : \frac{1}{2}$$

$$d = 6 \cdot \frac{2}{1}$$

$$d = 12$$

dalej



spis treści

symbole

zgłoś błąd

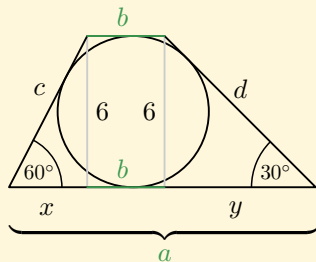
13 kwiecień



matma235@o2.pl

Pole trapezu:

$$P = \frac{(a+b)h}{2} = \frac{(4\sqrt{3}+12) \cdot 6}{2} = (4\sqrt{3}+12) \cdot 3 = 12\sqrt{3} + 36$$



$$\triangleright \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{6}{x}$$

$$\triangleright \sqrt{3} = \frac{6}{x} \quad / \cdot x$$

$$\sqrt{3} \cdot x = 6 \quad / : \sqrt{3}$$

$$x = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3}$$

$$x = 2\sqrt{3}$$

$$\triangleright \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{6}{y}$$

$$\triangleright \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{6}{y} \quad / \cdot y$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}y = 6 \quad / : \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y = 6 \cdot \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{18}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{18\sqrt{3}}{3}$$

$$y = 6\sqrt{3}$$

$$a = x + b + y$$

$$a - b = 2\sqrt{3} + 6\sqrt{3}$$

$$a - b = 8\sqrt{3}$$

$$a + b = 4\sqrt{3} + 12$$

dalej



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$\begin{cases} a - b = 8\sqrt{3} \\ a + b = 4\sqrt{3} + 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 8\sqrt{3} + b \\ 8\sqrt{3} + b + b = 4\sqrt{3} + 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 8\sqrt{3} + b \\ 2b = 4\sqrt{3} + 12 - 8\sqrt{3} \quad / : 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 8\sqrt{3} + b \\ b = 6 - 2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 8\sqrt{3} + 6 - 2\sqrt{3} \\ b = 6 - 2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 6 + 6\sqrt{3} \\ b = 6 - 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Odp. Pole trapezu wynosi $12\sqrt{3} + 36$, a jego podstawy $6 + 6\sqrt{3}$, $6 - 2\sqrt{3}$.



▷ **Zadanie 11** (6 pkt)

Wyznacz dziedzinę i naszkicuj wykres funkcji f danej wzorem $f(m) = x_1 \cdot x_2$, gdzie x_1, x_2 są różnymi pierwiastkami równania $(m+2)x^2 - (m+2)^2x + 3m+2 = 0$, w którym $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

▷ **Zadanie 12** (4 pkt)

Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} |x| - y = 1 \\ x^2 + (y+1)^2 = 8 \end{cases}$$

▷ **Zadanie 13** (5 pkt)

Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \log_x(4^x - 12 \cdot 2^x + 32)$

▷ **Zadanie 14** (4 pkt)

Dany jest ciąg trójkątów równobocznych takich, że bok następnego trójkąta jest wysokością poprzedniego. Oblicz sumę pól wszystkich tak utworzonych trójkątów, przyjmując, że bok pierwszego trójkąta ma długość a ($a > 0$).

▷ **Zadanie 15** (4 pkt)

Rozwiąż równanie:

$$\frac{1}{\sin x} + \operatorname{ctg} x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0$$

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień



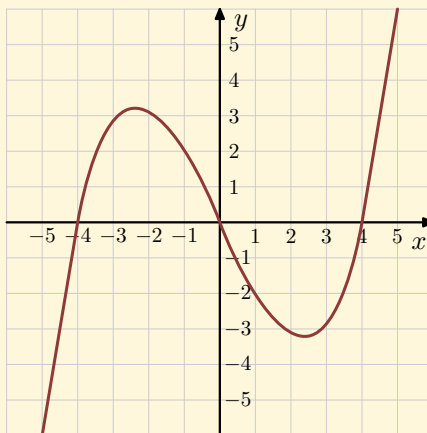


▷ **Zadanie 16** (4 pkt)

Para (Ω, P) jest przestrzenią probabilistyczną, a $A \subset \Omega$ i $B \subset \Omega$ są zdarzeniami niezależnymi. Wykaż, że jeżeli $P(A \cup B) = 1$, to jedno z tych zdarzeń jest zdarzeniem pewnym tj. $P(A) = 1$ lub $P(B) = 1$.

▷ **Zadanie 17** (5 pkt)

Rysunek przedstawia wykres pochodnej funkcji f .



- Podaj maksymalne przedziały, w których funkcja f jest malejąca.
- Wyznacz wartość x , dla której funkcja f osiąga maksimum lokalne. Odpowiedź uzasadnij.
- Wiedząc, że punkt $A = (1, 2)$ należy do wykresu funkcji f , napisz równanie stycznej do krzywej f w punkcie A .

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień





▷ **Zadanie 18** (8 pkt)

Punkty $A = (7, 8)$ i $B = (-1, 2)$ są wierzchołkami trójkąta ABC , w którym $|\angle BCA| = 90^\circ$.

- Wyznacz współrzędne wierzchołka C , wiedząc, że leży on na osi OX .
- Napisz równanie obrazu okręgu opisanego na trójkącie ABC w jednokładności o środku w punkcie $P = (1, 0)$ i skali $k = -2$.

▷ **Zadanie 19** (6 pkt)

Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny, w którym długość krawędzi podstawy jest równa a . Kąt między krawędzią boczną i krawędzią podstawy ma miarę 45° . Ostrosłup przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i środek przeciwległej jej krawędzi bocznej. Sporządź rysunek ostrosłupa i zaznacz otrzymany przekrój. Oblicz pole tego przekroju.

▷ **Zadanie 20** (4 pkt)

Ciąg (a_n) określony jest rekurencyjnie w następujący sposób:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1} \end{cases} \quad \text{dla dowolnego } n \geq 1$$

Wykaż, korzystając z zasady indukcji matematycznej, że ciąg (a_n) można określić za pomocą wzoru ogólnego $a_n = \frac{2}{2n-1}$, gdzie $n \geq 1$.

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zadanie 11 (6 pkt)

Wyznacz dziedzinę i narysuj wykres funkcji $f(m) = x_1 \cdot x_2$, gdzie x_1, x_2 są różnymi pierwiastkami równania $(m+2)x^2 - (m+2)^2x + 3m+2 = 0$, w którym $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Rozwiązanie:

$$(m+2)x^2 - (m+2)^2x + 3m+2 = 0$$

Równanie ma różne pierwiastki, jeżeli $\Delta > 0$.

$$\Delta = (-(m+2)^2)^2 - 4(m+2)(3m+2)$$

Rozwiązujemy nierówność kwadratową:

$$\triangleright (m+2)^4 - 4(m+2)(3m+2) > 0$$

$$(m+2)((m+2)^3 - 4(3m+2)) > 0$$

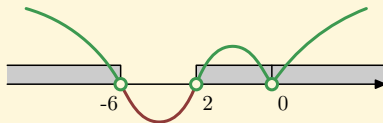
$$\triangleright (m+2)(m^3 + 6m^2 + 12m + 8 - 12m - 8) > 0$$

$$(m+2)(m^3 + 6m^2) > 0$$

$$m^2(m+2)(m+6) > 0$$

pierwiastki:
krotność:

$$\begin{array}{ccc} m_1 = 0 & m_2 = -2 & m_3 = -6 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}$$



$$m \in (-\infty, -6) \cup (-2, 0) \cup (0, \infty)$$

dalej



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

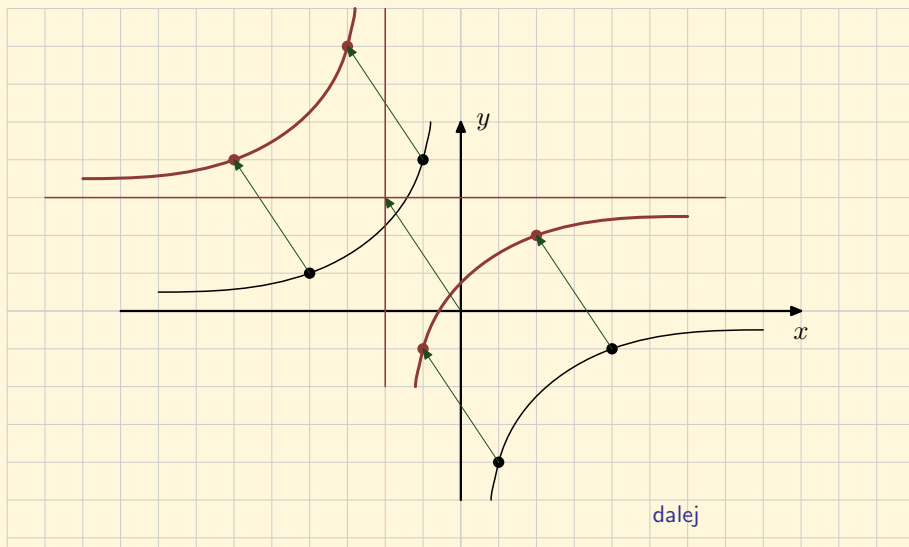
Korzystając ze wzorów Viète'a:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{3m+2}{m+2}$$

$$f(m) = \frac{3m+2}{m+2} = \frac{3(m+2)-4}{m+2} = \frac{3(m+2)}{m+2} - \frac{4}{m+2} = \frac{-4}{m+2} + 3$$

Wykres $f(x) = \frac{-4}{m+2} + 3$ otrzymujemy przez przesunięcie $y = \frac{-4}{m}$ o wektor $[-2, 3]$.

x	-4	-1	1	4
$y = \frac{-4}{x}$	1	4	-4	-1





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

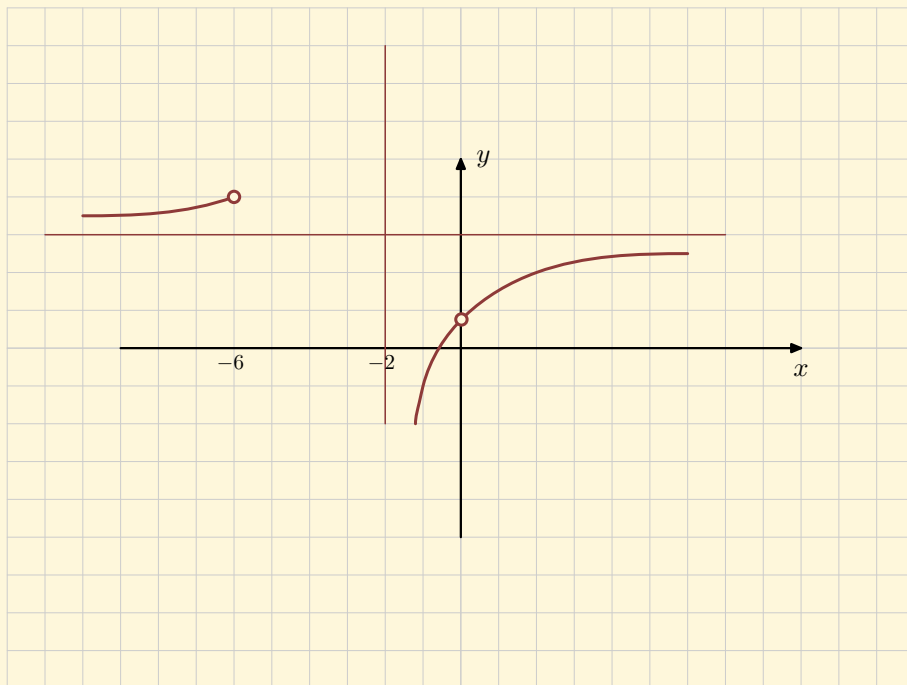


matma235@o2.pl

Po uwzględnieniu dziedziny $m \in (-\infty, -6) \cup (-2, 0) \cup (0, \infty)$ wykres funkcji

$$f(m) = \frac{3m + 2}{m + 2}$$

będzie wyglądał następująco:





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Zadanie 12 (4 pkt)

Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} |x| - y = 1 \\ x^2 + (y + 1)^2 = 8 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Korzystamy z definicji wartości bezwzględnej

dla $x \geq 0$

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + (y + 1)^2 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

dla $x < 0$

$$\begin{cases} -x - y = 1 \\ x^2 + (y + 1)^2 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

dla $x \geq 0$

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + (y + 1)^2 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 + y \\ (1 + y)^2 + (y + 1)^2 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 + y \\ 2(y + 1)^2 = 8 \quad / : 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 + y \\ (y + 1)^2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 + y \\ y + 1 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 + 1 = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 + y \\ y + 1 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 + (-3) = -2 \\ y = -3 \end{cases}$$

Jeżeli $x \geq 0$ to zostaje tylko rozwiązanie:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

dla $x < 0$

$$\begin{cases} -x - y = 1 & / \cdot (-1) \\ x^2 + (y + 1)^2 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ x^2 + (y + 1)^2 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 - y \\ (-1 - y)^2 + (y + 1)^2 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 - y \\ -(y + 1)^2 + (y + 1)^2 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 + y \\ 2(y + 1)^2 = 8 & / : 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 + y \\ (y + 1)^2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 - y \\ y + 1 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 - 1 = -2 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 - y \\ y + 1 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 - (-3) = 2 \\ y = -3 \end{cases}$$

Jeżeli $x < 0$ to zostaje tylko pierwsze rozwiązanie: $x = -2 \quad y = 1$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Zadanie 13 (5 pkt)

Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \log_x(4^x - 12 \cdot 2^x + 32)$

Rozwiązanie:

Korzystamy z definicji logarytmu:

$$x > 0$$

$$x \neq 1$$

$$4^x - 12 \cdot 2^x + 32 > 0$$

$$x \in (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$$

Po uwzględnieniu wszystkich trzech warunków mamy dziedzinę $f(x)$

$$x \in (0, 1) \cup (1, 2) \cup (3, \infty)$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

$$\triangleright 4^x - 12 \cdot 2^x + 32 > 0$$

$$2^{2x} - 12 \cdot 2^x + 32 > 0$$

$$(2^x)^2 - 12 \cdot 2^x + 32 > 0$$

$$t = 2^x \quad t > 0$$

$$t^2 - 12t + 32 > 0$$

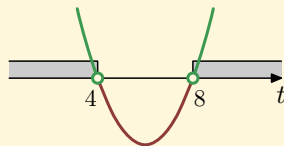
Rozwiązujemy nierówność kwadratową:

$$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (32) = 144 + 128 = 16$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$$

$$t_1 = \frac{-(-12) - 4}{2 \cdot 1} = \frac{8}{2} = 4$$

$$t_2 = \frac{-(-12) + 4}{2 \cdot 1} = \frac{16}{2} = 8$$



$$t < 4 \qquad t > 8$$

$$2^x < 4 \qquad 2^x > 8$$

$$2^x < 2^2 \qquad 2^x > 2^3$$

$$x < 2 \qquad x > 3$$

$$x \in (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zadanie 14 (4 pkt)

Dany jest ciąg trójkątów równobocznych takich, że bok następnego trójkąta jest wysokością poprzedniego. Oblicz sumę pól wszystkich tak utworzonych trójkątów, przyjmując, że bok pierwszego trójkąta ma długość a ($a > 0$).

Rozwiązanie:

Wzór na wysokość trójkąta równobocznego: $h = a \frac{\sqrt{3}}{2}$

bok pierwszego trójkąta $a_1 = a$

wysokość pierwszego trójkąta $h_1 = a_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a \frac{\sqrt{3}}{2}$

pole pierwszego trójkąta $P_1 = \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot h_1 = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$

bok drugiego trójkąta $a_2 = h_1 = a \frac{\sqrt{3}}{2}$

wysokość drugiego trójkąta $h_2 = a_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a \frac{3}{4}$

pole drugiego trójkąta $P_2 = \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot h_2 = \frac{1}{2} \cdot a \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a \frac{3}{4} = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3}{4}$

Widzimy, że długość boku drugiego trójkąta powstaje przez pomnożenia boku pierwszego przez $\frac{\sqrt{3}}{2}$ zatem długości boków kolejnych trójkątów równobocznych tworzą nieskończony **ciąg geometryczny** o ilorazie $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Widzimy, że pole drugiego trójkąta powstaje przez pomnożenia pola pierwszego przez $\frac{3}{4}$ zatem pola kolejnych trójkątów równobocznych tworzą nieskończony **ciąg geometryczny** o ilorazie $q = \frac{3}{4}$.

dalej



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Suma pól trójkątów:

$$\begin{aligned}P &= P_1 + P_2 + P_3 + \dots = \\&= a^2 \frac{\sqrt{3}}{4} + a^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3}{4} + a^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots = \\&= a^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots\right) =\end{aligned}$$

w nawiasie mamy **sumę nieskończonego ciągu geometrycznego**

$$= a^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4 = a^2 \sqrt{3}$$

Odp. Suma pól trójkątów wynosi $P = a^2 \sqrt{3}$.



spis treści

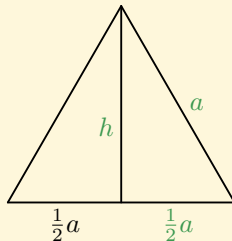
symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa:



$$\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + h^2 = a^2$$

$$\frac{1}{4}a^2 + h^2 = a^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2$$

$$h^2 = \frac{3}{4}a^2$$

$$h = \sqrt{\frac{3}{4}a^2}$$

$$h = a \frac{\sqrt{3}}{2}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zadanie 15 (4 pkt)

Rozwiąż równanie:

$$\frac{1}{\sin x} + \operatorname{ctg} x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0$$

Rozwiązanie:

$$\frac{1}{\sin x} + \operatorname{ctg} x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \stackrel{\triangleright}{=} \cos(90^\circ + x) \stackrel{\triangleright}{=} -\sin x$$

$$\frac{1}{\sin x} + \operatorname{ctg} x - \sin x = 0$$

$$\triangleright \frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin^2 x}{\sin x} = 0$$

$$\frac{1 - \cos x - \sin^2 x}{\sin x} = 0$$

dziedzina: $\sin \neq 0$ jeżeli $x \neq k\pi$ dla $k \in \mathbf{C}$ co widać na wykresie $y = \sin x$

$$1 - \cos x - \sin^2 x = 0$$

$$\triangleright 1 - \cos x - (1 - \cos^2 x) = 0$$

$$\cos x + \cos^2 x = 0$$

$$\cos x \cdot (\cos x + 1) = 0$$

dalej



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$\cos x \cdot (\cos x + 1) = 0 \quad \text{dla } x \neq k\pi$$

$$\cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

lub

$$\cos x + 1 = 0$$

$$\cos x = -1$$

$$x = \pi + 2k\pi = (2k + 1)\pi$$

Jeżeli $x \neq k\pi$ (wielokrotność π) to również $x \neq (2k + 1)\pi$, dlatego ostateczną odpowiedzią są tylko

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{dla } k \in \mathbf{C}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Zadanie 16 (4 pkt)

Para (Ω, P) jest przestrzenią probabilistyczną, a $A \subset \Omega$ i $B \subset \Omega$ są zdarzeniami niezależnymi. Wykaż, że jeżeli $P(A \cup B) = 1$, to jedno z tych zdarzeń jest zdarzeniem pewnym tj. $P(A) = 1$ lub $P(B) = 1$.

Rozwiązanie:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

zdarzenia są niezależne, gdy $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$1 = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

$$0 = P(A) - 1 + P(B) (1 - P(A))$$

$$0 = P(A) - 1 - P(B) (P(A) - 1)$$

$$0 = (P(A) - 1) \cdot (1 - P(B))$$

$$\begin{array}{lll} P(A) - 1 = 0 & \text{lub} & 1 - P(B) = 0 \\ P(A) = 1 & \text{lub} & P(B) = 1 \end{array}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

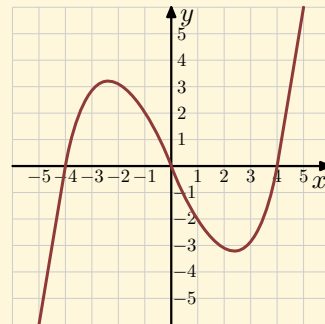


matma235@o2.pl

Zadanie 17 (5 pkt)

Rysunek przedstawia wykres pochodnej funkcji f .

- Podaj maksymalne przedziały, w których funkcja f jest malejąca.
- Wyznacz wartość x , dla której funkcja f osiąga maksimum lokalne. Odpowiedź uzasadnij.
- Wiedząc, że punkt $A = (1, 2)$ należy do wykresu funkcji f , napisz równanie stycznej do krzywej f w punkcie A .



Rozwiązanie:

- Podaj maksymalne przedziały, w których funkcja f jest malejąca.

Pochodna $f'(x) < 0$ dla $x \in (-\infty, -4) \cup (0, 4)$ co oznacza, że w tych przedziałach funkcja f jest malejąca.

- Wyznacz wartość x , dla której funkcja f osiąga maksimum lokalne. Odpowiedź uzasadnij.

Funkcja osiąga maksimum lokalne (ekstremum) dla $x = 0$ ponieważ:

$$f'(0) = 0$$

dla $x < 0$ $f'(x) > 0$ czyli funkcja jest rosnąca

dla $x > 0$ $f'(x) < 0$ czyli funkcja jest malejąca

dalej



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



c) Wiedząc, że punkt $A = (1, 2)$ należy do wykresu funkcji f , napisz równanie stycznej do krzywej f w punkcie A .

Równanie stycznej

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Funkcja f zawiera punkt $A = (1, 2)$ zatem $x_0 = 1$ i $f(x_0) = 2$

Z wykresu odczytujemy $f'(x_0) = f'(1) = -2$

$$y - 2 = -2(x - 1)$$

$$y = -2x + 2 + 2$$

$$y = -2x + 4$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

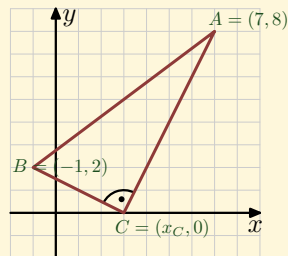
▷ Zadanie 18 (8 pkt)

Punkty $A = (7, 8)$ i $B = (-1, 2)$ są wierzchołkami trójkąta ABC , w którym $|\angle BCA| = 90^\circ$.

- Wyznacz współrzędne wierzchołka C , wiedząc, że leży on na osi OX .
- Napisz równanie obrazu okręgu opisanego na trójkącie ABC w jednokładności o środku w punkcie $P = (1, 0)$ i skali $k = -2$.

Rozwiązanie:

- Wyznacz współrzędne wierzchołka C , wiedząc, że leży on na osi OX .



Równanie prostej przechodzącej przez punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2)

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)(x - x_1) = 0$$

Przekształćmy je do postaci kierunkowej

$$\begin{aligned}(y - y_1)(x_2 - x_1) &= (y_2 - y_1)(x - x_1) \\ y &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1\end{aligned}$$

$$\text{Współczynnik kierunkowy prostej CA: } a_1 = \frac{8 - 0}{x_C - 7} = \frac{8}{x_C - 7}$$

$$\text{Współczynnik kierunkowy prostej CB: } a_2 = \frac{2 - 0}{x_C - (-1)} = \frac{2}{x_C + 1}$$

dalej

Proste prostopadłe mają współczynniki kierunkowe spełniające równanie:

$$a_1 \cdot a_2 = -1$$

$$\frac{8}{x_C - 7} \cdot \frac{2}{x_C + 1} = -1$$

$$\frac{16}{(x_C - 7)(x_C + 1)} = -1 \quad / \cdot (x_C - 7)(x_C + 1)$$

$$-(x_C - 7)(x_C + 1) = 16 \quad / \cdot (-1)$$

$$-(x_C^2 + x_C - 7x_C - 7) = -16$$

$$x_C^2 - 6x_C - 7 = -16$$

$$x_C^2 - 6x_C + 9 = 0$$

$$(x_C - 3)^2 = 0$$

$$x_C = 3$$

Odp. Szukanym punktem jest $C = (3, 0)$.

[dalej](#)



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



b) Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC w jednokładności o środku w punkcie $P = (1, 0)$ i skali $k = -2$.

Na początek wyznaczmy równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC . Równanie okręgu o środku (a, b) i promieniu r dane jest równaniem:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Korzystamy z tego, że średnica okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym to przeciwprostokątna tego trójkąta. Zatem środek okręgu to środek przeciwprostokątnej AB .

$$A = (7, 8) \quad B = (-1, 2)$$

$$S = \left(\frac{7 + (-1)}{2}, \frac{8 + 2}{2} \right)$$

$$S = (3, 5)$$

dalej



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Zadanie 12 (4 pkt)

Dana jest funkcja: $f(x) = \cos x - \sqrt{3} \sin x$, $x \in \mathbf{R}$.

a) Naszkicuj wykres funkcji f .

b) Rozwiąż równanie: $f(x) = 1$.

Rozwiązanie:

a) Naszkicuj wykres funkcji f .

$$f(x) = \cos x - \sqrt{3} \sin x$$

$$f(x) = 2 \left(\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \right)$$

$$\triangleright f(x) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} \cos x - \sin \frac{\pi}{3} \sin x \right)$$

Korzystamy ze wzoru $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

$$f(x) = 2 \cos \left(\frac{\pi}{3} + x \right)$$

$$f(x) = 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$$

Na początek rysujemy funkcję $f(x) = \cos x$, a następnie $f(x) = 2 \cos x$.

dalej



spis treści

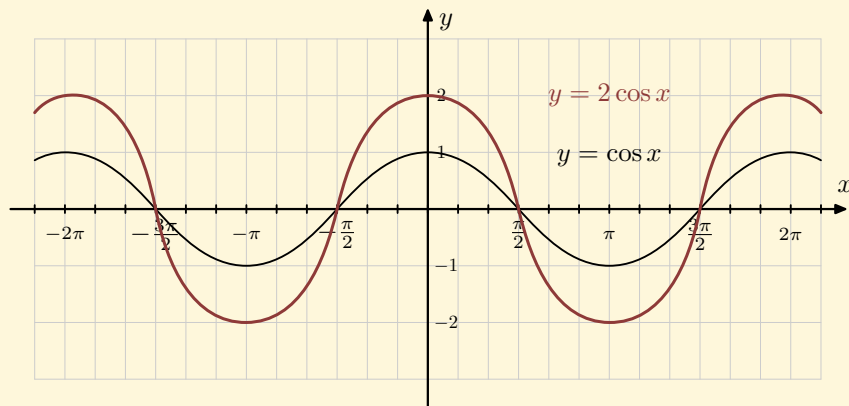
symbole

zgłoś błąd

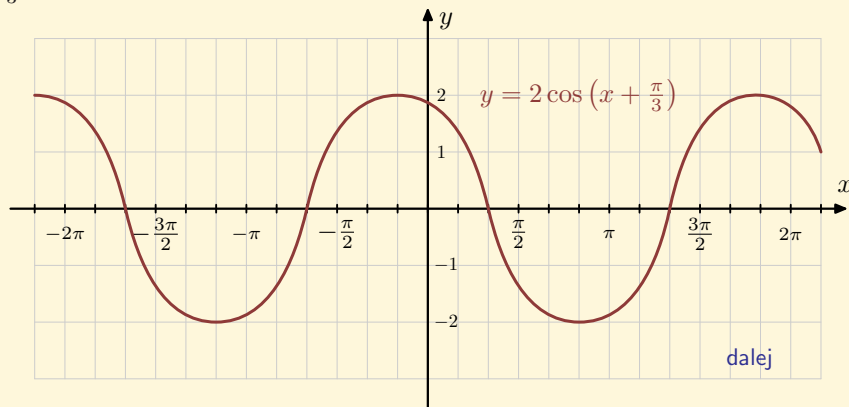
13 kwiecień



matma235@o2.pl



Funkcję $f(x) = 2 \cos(x + \frac{\pi}{3})$ otrzymujemy przez przesunięcie $f(x) = 2 \cos x$ o $\frac{\pi}{3}$ w lewo.



dalej

spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

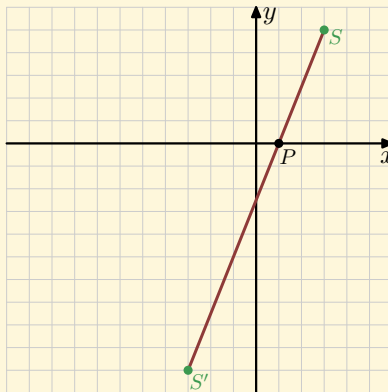


matma235@o2.pl

Równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC

$$(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$$

Okrąg ten przekształcamy przez jednokładność o środku $P = (1, 0)$ i skali $k = -2$. Otrzymany okrąg będzie miał dwa razy większy promień $r' = 10$. Obrazem środka $S = (3, 5)$ przekształconego przez jednokładność będzie punkt $S' = (-3, -10)$.



Szukany okrąg ma równanie

$$(x - (-3))^2 + (y - (-10))^2 = 10^2$$

$$(x + 3)^2 + (y + 10)^2 = 100$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zadanie 19 (6 pkt)

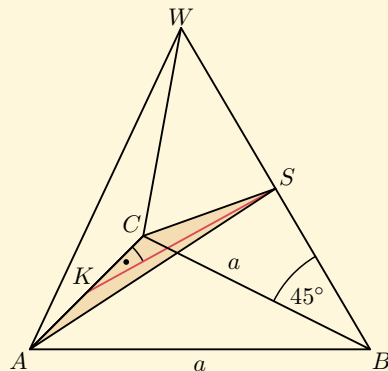
Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny, w którym długość krawędzi podstawy jest równa a . Kąt między krawędzią boczną i krawędzią podstawy ma miarę 45° . Ostrosłup przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i środek przeciwległej jej krawędzi bocznej. Sporządź rysunek ostrosłupa i zaznacz otrzymany przekrój. Oblicz pole tego przekroju.

Rozwiązanie:

$$|BS| = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

$$|CS| = \frac{a\sqrt{10}}{4}$$

$$|KS| = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$



Pole trójkąta ASC

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |KS| = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{6}}{4} = \frac{a^2\sqrt{6}}{8}$$

Odp. Pole przekroju wynosi $\frac{a^2\sqrt{6}}{8}$.



spis treści

symbole

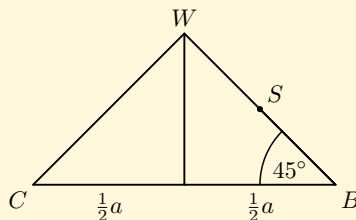
zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

W ostrosłupie prawidłowym ściany boczne są trójkątami równoramiennymi



$$\triangleright \cos 45^\circ = \frac{\frac{1}{2}a}{|BW|}$$

$$\triangleright \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2}a}{|BW|} \quad / \cdot |BW|$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot |BW| = \frac{a}{2} \quad / : \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$|BW| = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Punkt S jest środkiem krawędzi BW zatem

$$|BS| = \frac{1}{2}|BW| = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

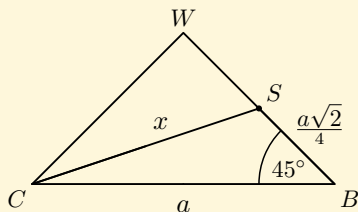


spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Korzystamy z twierdzenia cosinusów

$$x^2 = a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 2 \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x^2 = a^2 + \frac{a^2}{8} - \frac{4a^2}{8}$$

$$x^2 = \frac{5a^2}{8}$$

$$x = \sqrt{\frac{5a^2}{8}} = \sqrt{\frac{10a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$$



spis treści

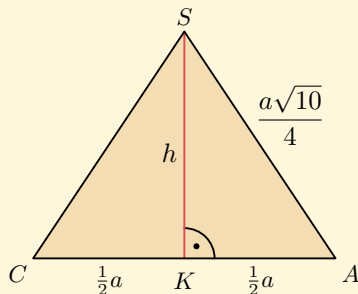
symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl



Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa

$$h^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{10}}{4}\right)^2$$

$$h^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{10a^2}{16}$$

$$h^2 = \frac{10a^2}{16} - \frac{a^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{6a^2}{16}$$

$$h = \sqrt{\frac{6a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zadanie 20 (4 pkt)

Ciąg (a_n) określony jest rekurencyjnie w następujący sposób:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1} \end{cases} \quad \text{dla dowolnego } n \geq 1$$

Wykaż, korzystając z zasady indukcji matematycznej, że ciąg (a_n) można określić za pomocą wzoru ogólnego $a_n = \frac{2}{2n-1}$, gdzie $n \geq 1$.

Rozwiązanie:

1. Dla $n = 1$

$$a_1 = \frac{2}{2 \cdot 1 - 1}$$

wzór $a_n = \frac{2}{2n-1}$ jest prawdziwy.

2. Załóżmy, że wzór $a_n = \frac{2}{2n-1}$ jest prawdziwy dla liczby k .

$$a_k = \frac{2}{2k-1}$$

3. Korzystając z założenia udowodnimy, że jest on prawdziwy dla $k+1$.

dalej



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

$$\begin{aligned}a_{k+1} &= \frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{\frac{2}{2k-1}}{\frac{2}{2k-1} + 1} = \frac{\frac{2}{2k-1}}{\frac{2}{2k-1} + \frac{2k-1}{2k-1}} = \frac{\frac{2}{2k-1}}{\frac{2k+1}{2k-1}} = \\&= \frac{2}{2k-1} \cdot \frac{2k-1}{2k+1} = \frac{2}{2k+1} = \frac{2}{2(k+1)-1}\end{aligned}$$

$$a_{k+1} = \frac{2}{2(k+1)-1}$$

Udowodniliśmy, że jeżeli wzór $a_n = \frac{1}{2n-1}$ jest prawdziwy dla liczby k , to jest on prawdziwy dla liczby $k+1$, co oznacza, że jeżeli jest prawdziwy dla 1, to jest on prawdziwy dla wszystkich liczb naturalnych.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

▷ Zadanie 11 (6 pkt)

Wyznacz wszystkie liczby całkowite k , dla których funkcja $f(x) = x^2 - 2^k \cdot x + 2^k + \frac{5}{4}$ przyjmuje wartości dodatnie dla każdego $x \in \mathbf{R}$.

Rozwiązanie:

$$f(x) = x^2 - 2^k \cdot x + 2^k + \frac{5}{4}$$

Wprowadźmy zmienną pomocniczą $t = 2^k \quad t > 0$.

$$f(x) = x^2 - tx + t + \frac{5}{4}$$

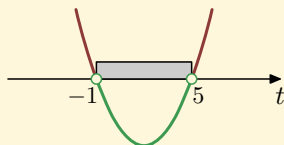
Funkcja kwadratowa przyjmuje wartości dodatnie dla każdego $x \in \mathbf{R}$, gdy jej wykres leży całkowicie nad osią OX , co się dzieje, gdy nie ma pierwiastków, czyli $\Delta < 0$.

$$\Delta = (-t)^2 - 4(t + \frac{5}{4}) = t^2 - 4t - 5$$

$$t^2 - 4t - 5 < 0$$

$$\Delta_t = 16 - 4(-5) = 16 + 20 = 36 \quad \sqrt{\Delta_t} = 6$$

$$t_1 = \frac{-(-4) - 6}{2} = -1 \quad t_2 = \frac{-(-4) + 6}{2} = 5$$



$t \in (-1, 5)$ i $t > 0$ czyli

$t \in (0, 5)$

dalej



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$t \in (0, 5)$$

$$0 < t < 5$$

$$0 < 2^k < 5$$

Odp. Rozwiązaniem są liczby całkowite $k = 2, 1, 0, -1, -2, \dots$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

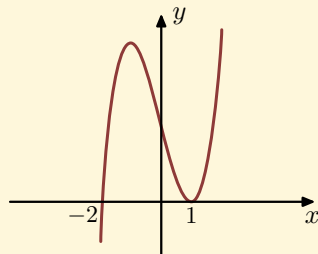


matma235@o2.pl

▷ Zadanie 12 (5 pkt)

Powyższy rysunek przedstawia fragment wykresu pewnej funkcji wielomianowej $W(x)$ stopnia trzeciego. Jedynymi miejscami zerowymi tego wielomianu są liczby (-2) oraz 1 , a pochodna $W'(-2) = 18$.

- Wyznaczyć wzór wielomianu $W(x)$.
- Wyznaczyć równanie prostej stycznej do wykresu tego wielomianu w punkcie o odciętej $x = 3$.



Rozwiązanie:

Wielomian ma dla $x = -2$ **pierwiastek o krotności** 1, a dla $x = 1$ pierwiastek o krotności 2. Wielomian ma więc postać

$$W(x) = a(x - (-2))(x - 1)^2 \quad a \neq 0$$

$$W(x) = a(x + 2)(x - 1)^2$$

$$W(x) = a(x + 2)(x^2 - 2x + 1) \quad \triangleright$$

$$W(x) = a(x^3 - 2x^2 + x + 2x^2 - 4x + 2)$$

$$W(x) = a(x^3 - 3x + 2)$$

Obliczamy **pochodną** wielomianu

$$W(x) = a(3x^2 - 3)$$

Jeżeli $W'(-2) = 18$ to

$$W'(-2) = a(3(-2)^2 - 3)$$

$$18 = a \cdot 9 \quad / : 9$$

$$a = 2 \quad \text{dalej}$$

$$W(x) = 2(x + 2)(x - 1)^2 \quad W'(x) = 2(3x^2 - 3) = 6x^2 - 6$$

b) Wyznacz równanie prostej stycznej do wykresu tego wielomianu w punkcie o odciętej $x = 3$.

Równanie stycznej dla $x_0 = 3$.

$$y - W(x_0) = W'(x_0)(x - x_0)$$

$$W(3) = 2(3 + 2)(3 - 1)^2 = 2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$$

$$W'(3) = 6 \cdot 3^2 - 6 = 6 \cdot 9 - 6 = 48$$

$$y - 40 = 48(x - 3)$$

$$y = 48x - 144 + 40$$

$$y = 48x - 104$$





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zadanie 13 (5 pkt)

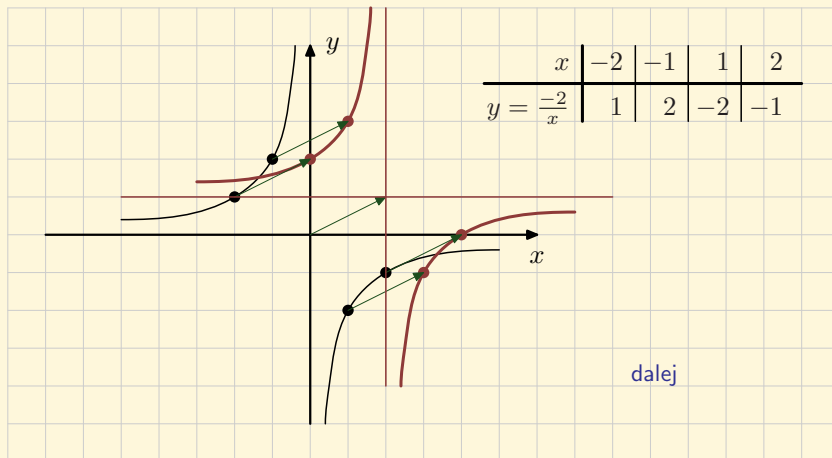
Sporządź wykres funkcji $f(x) = \left| \frac{x-4}{x-2} \right|$, a następnie korzystając z tego wykresu, wyznacz wszystkie wartości parametru k , dla których równanie $\left| \frac{x-4}{x-2} \right| = k$, ma dwa rozwiązania, których iloczyn jest liczbą ujemną.

Rozwiązanie:

Na początku narysujemy wykres funkcji $y = \frac{x-4}{x-2}$.

$$y = \frac{x-4}{x-2} = \frac{x-2-2}{x-2} = \frac{x-2}{x-2} + \frac{-2}{x-2} = \frac{-2}{x-2} + 1$$

Wykres $y = \frac{-2}{x-2} + 1$ otrzymujemy przez przesunięcie $y = \frac{-2}{x}$ o wektor $[2, 1]$.





spis treści

symbole

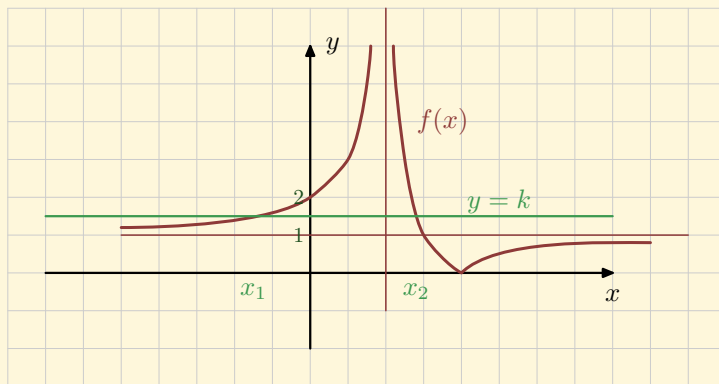
zgłoś błąd

13 kwiecień



$$f(x) = \left| \frac{x-4}{x-2} \right|$$

Wartość bezwzględna zmienia wykres funkcji przenosząc na górę dolną część wykresu symetrycznie do osi OX .



Równanie $\left| \frac{x-4}{x-2} \right| = k$ ma dwa rozwiązania x_1, x_2 różnych znaków jeżeli $k \in (1, 2)$.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zadanie 14 (4 pkt)

Niech $A, B \subset \Omega$ będą zdarzeniami losowymi, takimi że $P(A) = \frac{5}{12}$ oraz $P(B) = \frac{7}{11}$. Zbadaj, czy zdarzenia A i B są rozłączne.

Rozwiązanie:

Gdyby zdarzenia A i B były rozłączne ($A \cap B = \emptyset$) to $P(A \cap B) = 0$ co oznacza, że wzór

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

uproszczyłby się do postaci

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Ale $P(A) + P(B) = \frac{5}{12} + \frac{7}{11} = \frac{55}{132} + \frac{84}{132} = \frac{139}{132}$ czyli

$$P(A \cup B) = \frac{139}{132} > 1$$

Nie jest to możliwe, ponieważ wartość prawdopodobieństwa nigdy nie może być większa od 1.

Tak więc przyjęcie założenia, że zdarzenia A i B są rozłączne prowadzi do fałszu. Zatem nie mogą one być rozłączne.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zadanie 15 (5 pkt)

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny postaci: $2, \frac{2}{p-1}, \frac{2}{(p-1)^2}, \frac{2}{(p-1)^3}, \dots$ Wyznacz wszystkie wartości p , dla których granicą ciągu jest liczba:

a) 0.

b) 2.

Rozwiązanie

a)

Ciąg

$$2, \frac{2}{p-1}, \frac{2}{(p-1)^2}, \frac{2}{(p-1)^3}, \dots$$

możemy zapisać w takiej postaci:

$$2, 2\left(\frac{1}{p-1}\right), 2\left(\frac{1}{p-1}\right)^2, 2\left(\frac{1}{p-1}\right)^3, \dots$$

Taki ciąg jest zbieżny do 0 jeżeli

$$\left| \frac{1}{p-1} \right| < 1 \quad \text{dziedzina } p \neq 1$$

$$\frac{1}{p-1} < 1 \quad \text{ i } \quad \frac{1}{p-1} > -1$$

$$\frac{1}{p-1} - 1 < 0 \quad \frac{1}{p-1} + 1 > 0$$

$$\frac{1}{p-1} - \frac{p-1}{p-1} < 0 \quad \frac{1}{p-1} + \frac{p-1}{p-1} > 0$$

$$\frac{1-p+1}{p-1} < 0 \quad \frac{1+p-1}{p-1} > 0$$

dalej



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

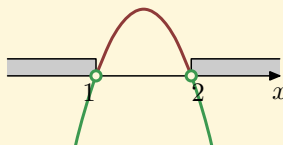
$$\frac{2-p}{p-1} < 0$$

$$(2-p)(p-1) < 0$$

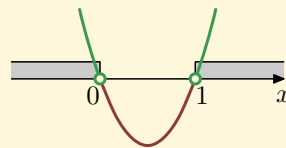
$$\frac{p}{p-1} > 0$$

$$p(p-1) > 0$$

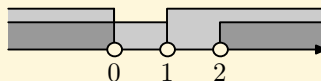
rozwiązujemy nierówności kwadratowe



$$p \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$$



$$p \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$$



część wspólna

$$p \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$$

b)

Ciąg

$$2, \quad 2\left(\frac{1}{p-1}\right), \quad 2\left(\frac{1}{p-1}\right)^2, \quad 2\left(\frac{1}{p-1}\right)^3, \quad \dots$$

jest zbieżny do 2 jeżeli

$$\frac{1}{p-1} = 1$$

dalej



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

$$\frac{1}{p-1} = 1$$

dziedzina $p \neq 1$

$$\frac{1}{p-1} - 1 = 0$$

$$\frac{1}{p-1} - \frac{p-1}{p-1} = 0$$

$$\frac{1-p+1}{p-1} = 0$$

$$\frac{2-p}{p-1} = 0$$

$$2-p = 0$$

$$p = 2$$

Odp. Dla $p \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ ciąg ma granicę równą 0, a dla $p = 2$ ma granicę równą 1.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Zadanie 16 (7 pkt)

Dane jest równanie postaci $(\cos x - 1) \cdot (\cos x + p + 1) = 0$, gdzie $p \in \mathbf{R}$ jest parametrem.

- a) Dla $p = -1$ wypisz wszystkie rozwiązania tego równania należące do przedziału $\langle 0; 5 \rangle$.
b) Wyznacz wszystkie wartości parametru p , dla których dane równanie ma w przedziale $\langle -\pi; \pi \rangle$ trzy różne rozwiązania.

Rozwiązanie:

- a) Dla $p = -1$ wypisz wszystkie rozwiązania tego równania należące do przedziału $\langle 0; 5 \rangle$.

$$(\cos x - 1) \cdot (\cos x + p + 1) = 0$$

$$p = -1$$

$$(\cos x - 1) \cdot (\cos x - 1 + 1) = 0$$

$$(\cos x - 1) \cdot \cos x = 0$$

$$\cos x - 1 = 0 \quad \text{lub} \quad \cos x = 0$$

$$\cos x = 1$$

W przedziale $\langle 0; 5 \rangle \approx \langle 0; \frac{5}{3,14} \cdot 3,14 \rangle \approx \langle 0; 1,6\pi \rangle$ rozwiązanie równań możemy odczytać z wykresu $y = \cos x$.

$$x = 0 \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{2} \quad \text{lub} \quad x = 1,5\pi$$

dalej



matma235@o2.pl

b) Wyznaczyć wszystkie wartości parametru p , dla których dane równanie ma w przedziale $\langle -\pi; \pi \rangle$ trzy różne rozwiązania.

$$(\cos x - 1) \cdot (\cos x + p + 1) = 0$$

$$\begin{aligned} \cos x - 1 &= 0 \\ \cos x &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{lub} \quad \cos x + p + 1 &= 0 \\ \cos x &= -p - 1 \end{aligned}$$

w przedziale $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$ z wykresu
 $y = \cos x$ odczytujemy rozwiązanie

$$x = 0$$

w przedziale $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$ na wykresie
 $y = \cos x$ widzimy, że równanie
ma dwa rozwiązania, jeżeli

$$-1 \leq -p - 1 < 1$$

$$\begin{aligned} -1 &\leq -p - 1 & \text{i} & & -p - 1 < 1 \\ p &\leq -1 + 1 & \text{i} & & -p < 2 \\ p &\leq 0 & \text{i} & & p > -2 \end{aligned}$$

$$p \in (-2, 0)$$

$$(\cos x - 1) \cdot (\cos x + p + 1) = 0$$

Pierwszy nawias daje jedno rozwiązanie niezależnie od p , dlatego drugi nawias musi dawać dwa rozwiązania, co się dzieje gdy $p \in (-2, 0)$.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

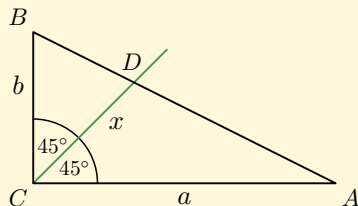


matma235@o2.pl

Zadanie 17 (4 pkt)

W trójkącie prostokątnym ABC ($\angle BCA = 90^\circ$) dane są długości przyprostokątnych: $|BC| = a$ i $|CA| = b$. Dwusieczna kąta prostego tego trójkąta przecina przeciwprostokątną AB w punkcie D . Wykaż, że długość odcinka CD jest równa $\frac{a \cdot b}{a+b} \cdot \sqrt{2}$. Sporządź pomocniczy rysunek uwzględniając podane oznaczenia.

Rozwiązanie:



Dwusieczna dzieli kąt 90° na dwa kąty po 45° . Liczymy pola trójkątów CAD i CDP .

$$P_{\triangle CAD} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot x \cdot \sin 45^\circ$$

$$P_{\triangle CDB} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot x \cdot \sin 45^\circ$$

$$\triangleright P_{\triangle CAD} = \frac{1}{2} b \cdot x \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\triangleright P_{\triangle CDB} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$P_{\triangle CAD} = \frac{\sqrt{2}}{4} bx$$

$$P_{\triangle CDB} = \frac{\sqrt{2}}{4} ax$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab$$

$$P_{\triangle CAD} + P_{\triangle CDB} = \frac{1}{2} ab$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} bx + \frac{\sqrt{2}}{4} ax = \frac{1}{2} ab \quad / \cdot 4$$

dalej

$$x \cdot \sqrt{2}(b + a) = 2ab$$

$$x = \frac{2ab}{\sqrt{2}(a + b)}$$

$$x = \frac{ab}{a + b} \sqrt{2}$$



matma235@o2.pl



- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień

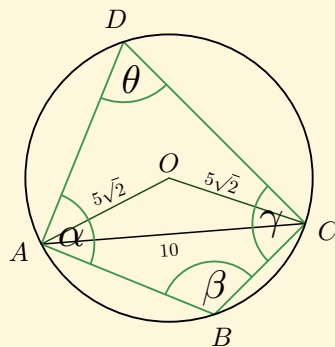


matma235@o2.pl

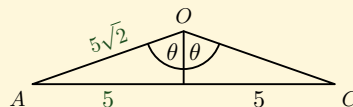
Zadanie 18 (8 pkt)

Oblicz miary kątów dowolnego czworokąta wpisanego w okrąg o promieniu $R = 5\sqrt{2}$, wiedząc ponadto, że jedna z przekątnych tego czworokąta ma długość 10, zaś iloczyn sinusów wszystkich jego kątów wewnętrznych jest równy $\frac{3}{8}$.

Rozwiązanie:



Na podstawie twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym $\angle AOC = 2\theta$



$$\triangleright \sin \theta = \frac{5}{5\sqrt{2}}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\triangleright \theta = 45^\circ$$

W czworokącie wpisanym w okrąg suma przeciwległych kątów wynosi 180° .

$$\beta + \theta = 180^\circ$$

$$\alpha + \gamma = 180^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - \theta$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha$$

$$\beta = 135^\circ$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \sin \theta = \frac{3}{8}$$

$$\sin \alpha \cdot \sin 135^\circ \cdot \sin(180^\circ - \alpha) \cdot \sin 45^\circ = \frac{3}{8}$$

dalej



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

$$\sin \alpha \cdot \sin(180^\circ - 45^\circ) \cdot \sin(180^\circ - \alpha) \cdot \sin 45^\circ = \frac{3}{8}$$

$$\triangleright \sin \alpha \cdot \sin 45^\circ \cdot \sin \alpha \cdot \sin 45^\circ = \frac{3}{8}$$

$$\triangleright \sin \alpha \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin \alpha \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{8}$$

$$\sin^2 \alpha \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \quad / \cdot 2$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\triangleright \alpha = 60^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha$$

$$\gamma = 180^\circ - 60^\circ$$

$$\gamma = 120^\circ$$

Odp. Kąty czworokąta to 45° , 135° , 60° , 120° .



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zadanie 19 (6 pkt)

Korzystając z zasady indukcji matematycznej, udowodnij, że każda liczba naturalna $n \geq 5$ spełnia nierówność $2^n > n^2 + n - 1$.

Rozwiązanie:

1. Dla $n = 5$

$$2^5 > 5^2 + 5 - 1$$

$$32 > 29$$

nierówność jest prawdziwa.

2. Załóżmy, że nierówność jest prawdziwa dla liczby k

$$2^k > k^2 + k - 1$$

3. Korzystając z założenia udowodnimy, że jest ona prawdziwa dla $k + 1$

$$\begin{aligned}(k + 1)^2 + k + 1 - 1 &\stackrel{\text{D}}{=} k^2 + 2k + 1 + k = \\&= k^2 + k - 1 + 2k + 2 < \quad (2k + 2 < k^2 + k - 1) \\&< k^2 + k - 1 + k^2 + k - 1 = \\&< 2 \cdot (k^2 + k - 1) = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}\end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$2^{k+1} > (k + 1)^2 + (k + 1) - 1$$

Udowodniliśmy, że jeżeli nierówność $2^n > n^2 + n - 1$ jest prawdziwa dla liczby k , to jest ona prawdziwa dla liczby $k + 1$, co oznacza, że jeżeli jest prawdziwa dla 5, to jest ona prawdziwa dla wszystkich liczb naturalnych.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$2k + 2 < k^2 + k - 1$$

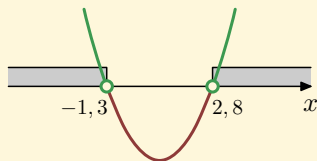
$$0 < k^2 - k - 3$$

rozwiązujemy nierówność kwadratową

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 1 + 12 = 13$$

$$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{13}}{2 \cdot 1} = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \approx -1,3$$

$$x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{13}}{2 \cdot 1} = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \approx 2,8$$



$$k \in \left(-\infty, \frac{1 - \sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}, \infty\right)$$

Z rozwiązania wynika, że dla każdego $k \geq 5$ nierówność $2k + 2 < k^2 + k - 1$ jest prawdziwa.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zadanie 11 (3 pkt)

Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \log_{x^2-3}(x^3 + 4x^2 - x - 4)$ i zapisz ją w postaci sumy przedziałów liczbowych.

Rozwiązanie:

$$f(x) = \log_{x^2-3}(x^3 + 4x^2 - x - 4)$$

Korzystamy z definicji logarytmu:

$$x^2 - 3 > 0$$

$$x^2 - 3 \neq 1$$

$$x^3 + 4x^2 - x - 4 > 0$$

$$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) > 0$$

$$x^2 \neq 4$$

$$x^2(x + 4) - (x + 4) > 0$$

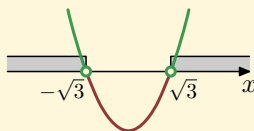
$$x_1 = \sqrt{3} \quad x_2 = -\sqrt{3}$$

$$x \neq 2 \text{ i } x \neq -2$$

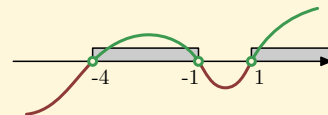
$$(x + 4)(x^2 - 1) > 0$$

$$(x + 4)(x - 1)(x + 1) > 0$$

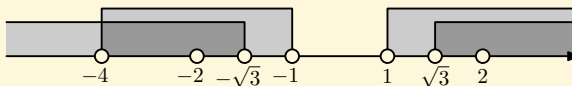
$$x_1 = -4 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = -1$$



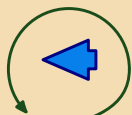
$$x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$$



$$x \in (-4, -1) \cup (1, \infty)$$



$$\text{Odp. } x \in (-4, -2) \cup (-2, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 2) \cup (2, \infty)$$



- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień



b) Rozwiąż równanie: $f(x) = 1$.

$$\cos x - \sqrt{3} \sin x = 1$$

$$2 \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = 1 \quad / : 2$$

$$\cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}$$

Na wykresie $y = \cos x$ widzimy, że takie równanie ma dwa **rozwiązania**

$$\begin{aligned} x + \frac{\pi}{3} &= -\frac{\pi}{3} + 2k\pi & \text{lub} & \triangleright x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi & k \in \mathbb{C} \\ x &= -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi & & & x = 2k\pi \\ x &= -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi & & & \end{aligned}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zadanie 13 (4 pkt)

Rzucamy n razy dwiema symetrycznymi sześciennymi kostkami do gry. Oblicz, dla jakich n prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej raz tej samej liczby oczek na obu kostkach jest mniejsze od $\frac{671}{1296}$.

Rozwiązanie:

Liczymy prawdopodobieństwo wyrzucenia tej samej liczby oczek na obu kostkach przy jednorazowym rzucie.

liczba wszystkich możliwych wyników: $\overline{\Omega} = 6 \cdot 6 = 36$

na obu kostkach jest ta sama liczba oczek: $A = \{(1, 1), (2, 2), \dots, (6, 6)\}$ $\overline{A} = 6$

$$p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Wykorzystamy schemat Bernoulliego do policzenia prawdopodobieństwa zdarzenia przeciwnego (bo łatwiej), czyli nie wyrzucenia w n rzutach ani razu tej samej liczby oczek.

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

dalej



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

n

– liczba wszystkich rzutów

$k = 0$

– liczba rzutów w których wypadła ta sama liczba oczek

$p = \frac{1}{6}$

– prawdopodobieństwo wyniku z tą samą liczbą oczek na obu kostkach

$q = 1 - p = \frac{5}{6}$

– prawdopodobieństwo wyniku z różną liczbą oczek na obu kostkach

$$P_n(0) = \binom{n}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-0}$$

$$P_n(0) = \frac{n!}{(n-0)!0!} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$P_n(0) = 1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$P_n(0) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

Prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej raz tej samej liczby oczek na obu kostkach w n rzutach jest zatem równe:

$$1 - P_n(0) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

dalej



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n < \frac{671}{1296}$$

$$1 - \frac{671}{1296} < \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$\frac{625}{1296} < \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)^4 < \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$4 > n$$

$$n < 4$$

$$n \in \{1, 2, 3\}$$

Odp. Prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej raz tej samej liczby oczek na obu kostkach jest mniejsze od $\frac{671}{1296}$ dla $n \in \{1, 2, 3\}$.



- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zadanie 14 (5 pkt)

Oblicz: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2)}{5 + 7 + 9 + \dots + (2n + 3)}$

Rozwiązanie:

Licznik $1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2)$ jest sumą ciągu arytmetycznego w którym:

pierwszy wyraz: $a_1 = 1$

różnica $r = 3$

wyraz ogólny $a_n = 1 + (n - 1) \cdot 3 = 3n - 2$

Suma tego ciągu wynosi:

$$S_n = \frac{1 + (3n - 2)}{2} \cdot n = \frac{3n - 1}{2} \cdot n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$$

Mianownik $5 + 7 + 9 + \dots + (2n + 3)$ jest sumą ciągu arytmetycznego w którym:

pierwszy wyraz: $a_1 = 5$

różnica $r = 2$

wyraz ogólny $a_n = 5 + (n - 1) \cdot 2 = 2n + 3$

Suma tego ciągu wynosi:

$$S_n = \frac{5 + (2n + 3)}{2} \cdot n = \frac{2n + 8}{2} \cdot n = n^2 + 4n$$

dalej



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2)}{5 + 7 + 9 + \dots + (2n + 3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n}{n^2 + 4n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{n}{n^2} \right)}{n^2 \left(1 + \frac{4n}{n^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overset{0}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \frac{1}{n}}{1 + \frac{4}{n}} = \frac{3}{2}$$

$\searrow 0$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

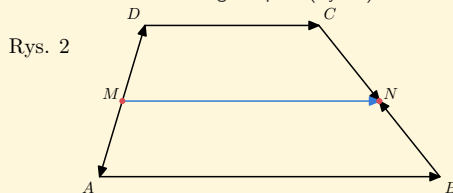
13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zadanie 15 (4 pkt)

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie, ustal związek między wektorem $\overrightarrow{MN}$ oraz wektorami $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$, wiedząc, że czworokąt $ABCD$ jest dowolnym trapezem, zaś punkty M i N są odpowiednio środkami ramion AD i BC tego trapezu (Rys. 2).



Rys. 2

Podaj interpretację otrzymanego wyniku.

Rozwiązanie:

Korzystając z własności wektorów i działań na wektorach, zapisujemy równości:

$$(1) \quad \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$$

oraz

$$(2) \quad \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}$$

Po dodaniu równości (1) i (2) stronami otrzymujemy:

$$2 \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}$$

$$\overrightarrow{MD} = -\overrightarrow{MA} \text{ oraz } \overrightarrow{CN} = -\overrightarrow{BN}, \text{ więc:}$$

$$2 \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BN}$$

$$2 \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$$

Wykorzystując własności iloczynu wektora przez liczbę, ostatnią równość można zinterpretować następująco:

odcinek łączący środki dwóch ramion dowolnego trapezu jest równoległy do podstaw tego trapezu, zaś jego długość jest równa połowie sumy długości tych podstaw.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zadanie 16 (5 pkt)

Sześcian o krawędzi długości a przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem $\frac{\pi}{3}$. Sporządź odpowiedni rysunek. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

Rozwiązanie:

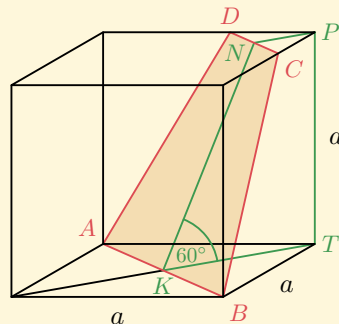
miara łukowa: $\frac{\pi}{3} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$

przekrojem jest trapez

podstawa trapezu: $|AB| = a\sqrt{2}$

wysokość trapezu: $|KN| = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$

podstawa trapezu: $|CD| = a\left(\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$



Pole trapezu $ABCD$:

$$P = \frac{(|AB| + |CD|) \cdot |KN|}{2}$$

$$P = \frac{\left[a\sqrt{2} + a\left(\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\right] \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}a}{2}$$

$$P = a^2 \left(2\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2a^2 \left(\frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{1}{3}\right)$$

$$P = \frac{2(\sqrt{6} - 1)a^2}{3}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Rysując przekrój musimy najpierw odpowiedzieć na pytanie, czy będzie on przecinał krawędzie sześcianu powyżej punktu P czy poniżej.

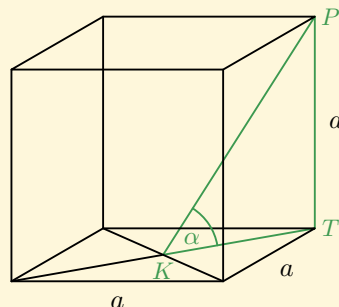
Odcinek KT jest połową przekątnej kwadratu o boku a zatem

$$|KT| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\triangleright \operatorname{tg} \alpha = \frac{|TP|}{|KT|} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{\sqrt{2}} \approx 1,4$$

$$\triangleright \alpha \approx 54,7^\circ$$



Przekrój rysujemy pod kątem 60° zatem będzie przechodził powyżej punktu P .



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

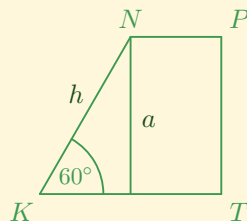
$$\triangleright \sin 60^\circ = \frac{a}{h}$$

$$\triangleright \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{h} \quad / \cdot h$$

$$\sqrt{3}h = 2a \quad / : \sqrt{3}$$

$$h = \frac{2a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$h = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$$





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



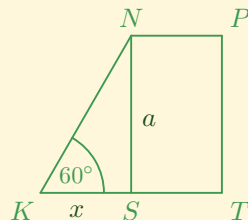
matma235@o2.pl

Na początek obliczymy długość odcinka KS

$$\triangleright \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{x}{a}$$

$$\triangleright \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{a} \quad / \cdot a$$

$$x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$



Odcinek KT jest połową przekątnej kwadratu zatem ma długość $|KT| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Odcinek NP ma zatem długość

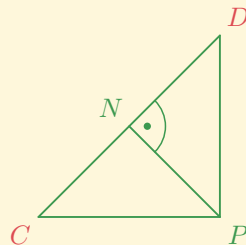
$$|NP| = |ST| = |KT| - x = \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Trójkąt CPD składa się z dwóch trójkątów równoramiennych zatem

$$|CD| = |CN| + |ND| = 2|NP|$$

$$|CD| = 2 \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{3} \right)$$

$$|CD| = a \left(\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \right)$$





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Zadanie 17 (7 pkt)

Wykaż, bez użycia kalkulatora i tablic, że $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ jest liczbą całkowitą.

Rozwiązanie:

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$$

Trzeba było wpisać na to, że wyrażenia pod pierwiastkiem można zwinąć ze wzorów skróconego mnożenia

$$5\sqrt{2}+7 = (\sqrt{2}+1)^3 \quad \text{ponieważ } (\sqrt{2}+1)^3 = 2\sqrt{2}+6+3\sqrt{2}+1 = 5\sqrt{2}+7$$

$$5\sqrt{2}-7 = (\sqrt{2}-1)^3 \quad \text{ponieważ } (\sqrt{2}-1)^3 = 2\sqrt{2}-6+3\sqrt{2}-1 = 5\sqrt{2}-7$$

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} = \sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)^3} - \sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)^3} = \sqrt{2}+1 - (\sqrt{2}-1) = 2$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zadanie 18 (8 pkt)

Pary liczb (x, y) spełniające układ równań:

$$\begin{cases} -4x^2 + y^2 + 2y + 1 = 0 \\ -x^2 + y + 4 = 0 \end{cases}$$

są współzrędnymi wierzchołków czworokąta wypukłego $ABCD$.

- Wyznacz współrzędne punktów: A , B , C , D .
- Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem równoramiennym.
- Wyznacz równanie okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$.

Rozwiązanie:

- Wyznacz współrzędne punktów: A , B , C , D .

$$\begin{cases} -4x^2 + y^2 + 2y + 1 = 0 \\ -x^2 + y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x^2 + (y+1)^2 = 0 & \triangleright \\ -x^2 + y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y+1)^2 = 4x^2 \\ -x^2 + y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+1 = 2x \\ y = x^2 - 4 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} y+1 = -2x \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$$

dalej



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x - 1 \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = 5 \end{cases}$$

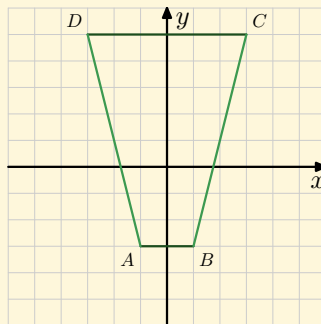
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$A = (-1, -3)$$

$$B = (1, -3)$$

$$C = (3, 5)$$

$$D = (-3, 5)$$



b) Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem równoramiennym.

Trapez jest równoramienny, jeżeli odcinki AD i BC mają równe długości.

$$A = (-1, -3) \quad D = (-3, 5)$$

$$|AD| = \sqrt{(-3 - (-1))^2 + (5 - (-3))^2} = \sqrt{(-2)^2 + 8^2} = \sqrt{4 + 64} = \sqrt{68}$$

$$B = (1, -3) \quad C = (3, 5)$$

$$|BC| = \sqrt{(3 - 1)^2 + (5 - (-3))^2} = \sqrt{2^2 + 8^2} = \sqrt{4 + 64} = \sqrt{68}$$

Odcinki AD i BC są **równe**, zatem trapez $ABCD$ jest równoramienny.

[dalej](#)



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$$

$$2x - 1 = x^2 - 4$$

$$0 = x^2 - 4 - 2x + 1$$

$$0 = x^2 - 2x - 3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Wyznaczamy **pierwiastki** równania:

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$$

$$x_1 = \frac{-(-2) - 4}{2 \cdot 1} = \frac{2 - 4}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-(-2) + 4}{2 \cdot 1} = \frac{2 + 4}{2} = 3$$

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 2 \cdot (-1) - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 2 \cdot 3 - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 5 \end{cases}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

$$\begin{cases} y = -2x - 1 \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$$

$$-2x - 1 = x^2 - 4$$

$$0 = x^2 - 4 + 2x + 1$$

$$0 = x^2 + 2x - 3$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

Wyznaczamy **pierwiastki** równania:

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$$

$$x_1 = \frac{-2 - 4}{2 \cdot 1} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$x_2 = \frac{-2 + 4}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\begin{cases} x_1 = -3 \\ y_1 = -2 \cdot (-3) - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = -2 \cdot 1 - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -3 \\ y_1 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = -3 \end{cases}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

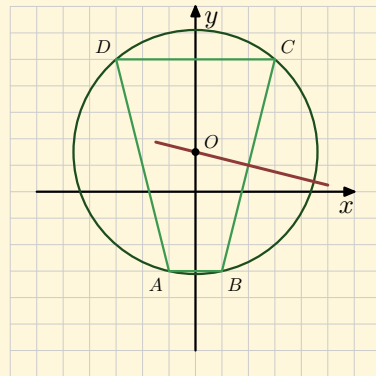
Środek okręgu opisanego na tym trapezie leży na osi y . Środek okręgu leży również na symetralnej dowolnego boku np. BC . Zatem punkt przecięcia symetralnej i osi y da nam współrzędne środka okręgu.

równanie prostej przechodzącej przez punkty B i C :

$$y = 4x - 7$$

symetralna boku BC :

$$y = -\frac{1}{4}x + 1\frac{1}{2}$$



symetralna przecina oś y w punkcie $O = (0, 1\frac{1}{2})$. Punkt O jest środkiem okręgu.

Znajdujemy promień okręgu licząc odległość punktu O od C .

$$O = (0, 1\frac{1}{2}), C = (3, 5)$$

$$|OC| = \sqrt{(3-0)^2 + (5-\frac{3}{2})^2} = \sqrt{9 + (\frac{7}{2})^2} = \sqrt{\frac{36}{4} + \frac{49}{4}} = \frac{\sqrt{85}}{2}$$

równanie okręgu o środku $O = (0, \frac{3}{2})$ i promieniu $r = \frac{\sqrt{85}}{2}$

$$(x-0)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{85}}{2}\right)^2$$

$$x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{85}{4}$$

prosta przechodząca przez punkty $B = (1, -3)$ i $C = (3, 5)$

$$(y - (-3))(3 - 1) - (5 - (-3))(x - 1) = 0$$

$$(y + 3) \cdot 2 - 8(x - 1) = 0$$

$$2y + 6 - 8x + 8 = 0$$

$$2y = 8x - 14 \quad / : 2$$

$$y = 4x - 7$$

spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Szukamy równania $y = ax + b$ symetralnej odcinka BC . Wiemy, że jest ona prostopadła do prostej $y = 4x - 7$ zawierającej bok BC więc:

$$a \cdot 4 = -1$$

$$a = -\frac{1}{4}$$

Symetralna boku BC przechodzi przez jego środek:

$$B = (1, -3) \quad C = (3, 5)$$

$$S = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{-3+5}{2} \right)$$

$$S = (2, 1)$$

Symetralna boku BC $y = -\frac{1}{4}x + b$ zawiera punkt S zatem:

$$1 = -\frac{1}{4} \cdot 2 + b$$

$$1 = -\frac{1}{2} + b$$

$$b = 1\frac{1}{2}$$

Równanie symetralnej:

$$y = -\frac{1}{4}x + 1\frac{1}{2}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zadanie 19 (10 pkt)

Dane jest równanie: $x^2 + (m - 5)x + m^2 + m + \frac{1}{4} = 0$.

Zbadaj, dla jakich wartości parametru m stosunek sumy pierwiastków rzeczywistych równania do ich iloczynu przyjmuje wartość najmniejszą. Wyznacz tę wartość.

Rozwiązanie:

$$x^2 + (m - 5)x + m^2 + m + \frac{1}{4} = 0$$

Równanie ma pierwiastki rzeczywiste, gdy $\Delta \geq 0$, czyli dla $m \in \langle -6, \frac{4}{3} \rangle$

Korzystając ze wzorów Viéte'a:

$$x_1 + x_2 = -m + 5 \qquad x_1 \cdot x_2 = m^2 + m + \frac{1}{2}$$

Stosunek tych wyrażeń daje funkcję:

$$f(m) = \frac{-m + 5}{m^2 + m + \frac{1}{4}}$$
$$f(m) = \frac{-m + 5}{(m + \frac{1}{2})^2} \quad \triangleright$$

Jej dziedzina $m \in \langle -6, -\frac{1}{2} \rangle \cup (-\frac{1}{2}, \frac{4}{3} \rangle$

dalej



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$f(m) = \frac{-m + 5}{(m + \frac{1}{2})^2}$$

W celu wyznaczenia najmniejszej wartości tej funkcji obliczymy wartości na krańcach dziedziny $\langle -6, -\frac{1}{2} \rangle \cup (-\frac{1}{2}, \frac{4}{3} \rangle$, a następnie badamy jej **monotoniczność za pomocą pochodnej**.

$$f(-6) = \frac{-(-6) + 5}{(-6 + \frac{1}{2})^2} = \frac{11}{(-\frac{11}{2})^2} = \frac{4}{11}$$

$$f(\frac{4}{3}) = \frac{-\frac{4}{3} + 5}{(\frac{4}{3} + \frac{1}{2})^2} = \frac{\frac{11}{3}}{(\frac{11}{6})^2} = \frac{11}{3} \cdot \frac{36}{121} = \frac{12}{11}$$

Badając **monotoniczność funkcji w dziedzinie** dochodzimy do wniosku, że najmniejsza wartość funkcji znajduje się na krańcach dziedziny.

Funkcja $f(m)$ osiąga najmniejszą wartość dla $m = -6$ i wynosi ona $\frac{4}{11}$.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

$$x^2 + (m - 5)x + m^2 + m + \frac{1}{4} = 0$$

$$\Delta = (m - 5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m^2 + m + \frac{1}{4}) = m^2 - 10m + 25 - 4m^2 - 4m - 1 = -3m^2 - 14m + 24$$

$$\Delta \geqslant 0$$

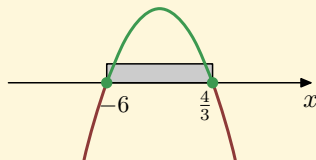
$$-3m^2 - 14m + 24 \geqslant 0$$

rozwiązujemy nierówność kwadratową

$$\Delta_m = (-14)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 24 = 196 = 196 + 288 = 468 \quad \sqrt{\Delta_m} = 22$$

$$m_1 = \frac{14 - 22}{-6} = \frac{-8}{-6} = \frac{4}{3}$$

$$m_2 = \frac{14 + 22}{-6} = \frac{36}{-6} = -6$$



$$m \in \left\langle -6, \frac{4}{3} \right\rangle$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

$$f(m) = \frac{-m + 5}{(m + \frac{1}{2})^2}$$

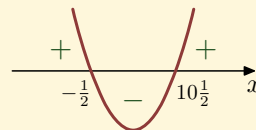
Pochodna tej funkcji:

$$f'(m) = \frac{m^2 - 10m - 5\frac{1}{4}}{(m + \frac{1}{2})^4}$$

Liczmy pierwiastki licznika:

$$m_1 = -\frac{1}{2} \quad m_2 = 10\frac{1}{2}$$

Znak pochodnej zależy od licznika, dlatego rysujemy przybliżony wykres wyrażenia w liczniku

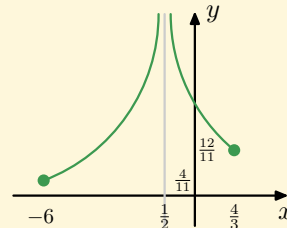


Odczytujemy monotoniczność funkcji w dziedzinie $m \in \langle -6, -\frac{1}{2} \rangle \cup (-\frac{1}{2}, \frac{4}{3} \rangle$ ze znaku pochodnej.

wykres funkcji $f(m)$ w dziedzinie

$f'(m) > 0$ dla $m \in \langle -6, -\frac{1}{2} \rangle$ funkcja rośnie

$f'(m) < 0$ dla $m \in (-\frac{1}{2}, \frac{4}{3})$ funkcja maleje





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

$$f(m) = \frac{-m + 5}{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2}$$

Licząc pochodną funkcji korzystamy ze wzorów

$$\begin{aligned} f'(m) &= \left(\frac{-m + 5}{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2} \right)' = \\ &= \left(\frac{-m + 5}{m^2 + m + \frac{1}{4}} \right)' = \\ &= \frac{(-m + 5)'(m^2 + m + \frac{1}{4}) - (-m + 5)(m^2 + m + \frac{1}{4})'}{(m^2 + m + \frac{1}{4})^2} = \\ &= \frac{-1 \cdot (m^2 + m + \frac{1}{4}) - (-m + 5)(2m + 1)}{\left(m + \frac{1}{2}\right)^4} = \\ &= \frac{-m^2 - m - \frac{1}{4} - (-2m^2 - m + 10m + 5)}{\left(m + \frac{1}{2}\right)^4} = \\ &= \frac{-m^2 - m - \frac{1}{4} + 2m^2 + m - 10m - 5}{\left(m + \frac{1}{2}\right)^4} = \\ &= \frac{m^2 - 10m - 5\frac{1}{4}}{\left(m + \frac{1}{2}\right)^4} \end{aligned}$$



$$m^2 - 10m - 5\frac{1}{4} = 0$$

liczymy pierwiastki równania kwadratowego

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 5\frac{1}{4} = 100 + 21 = 121 \quad \sqrt{\Delta} = 11$$

$$m_1 = \frac{10 - 11}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$m_2 = \frac{10 + 11}{2} = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2}$$

spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl



▷ Zadanie 1 (4 pkt)

Lewa strona równania $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots + x^{2n} + \dots = 3$ jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego o ilorazie x^2 . Z warunku zbieżności mamy $x^2 < 1$. Zatem dziedziną równania jest przedział $(-1, 1)$.

Równanie można zapisać w postaci $1 + x^2(1 + x^2 + x^4 + \dots) = 3$. Stąd $1 + 3x^2 = 3$.

Pierwiastkami ostatniego równania są liczby: $x_1 = -\frac{\sqrt{6}}{3}$, $x_2 = \frac{\sqrt{6}}{3}$ należące do dziedziny.

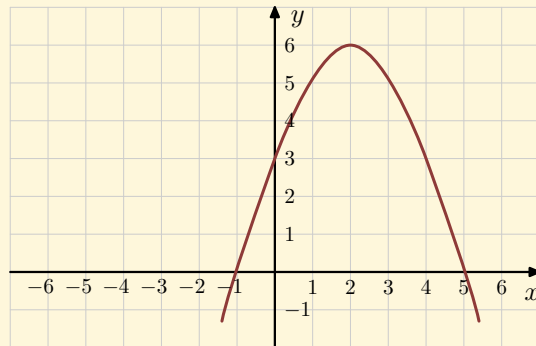
Odpowiedź: Rozwiązaniami równania są liczby $x_1 = -\frac{\sqrt{6}}{3}$, $x_2 = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Postępując w analogiczny sposób rozwiąż równanie: $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots = 2$.

▷ Zadanie 2 (4 pkt)

Rysunek przedstawia fragment wykresu funkcji kwadratowej f .

- Podaj miejsce zerowe f .
- Podaj rozwiązanie nierówności $f(x) \leq 0$.
- Podaj rozwiązanie równania $f(x) = 3$

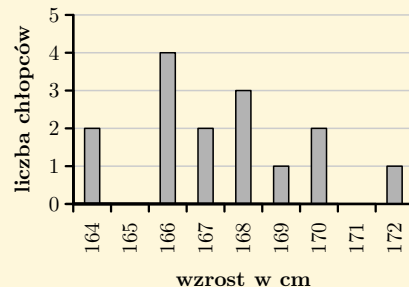




▷ **Zadanie 3** (4 pkt)

Dane dotyczące wzrostu chłopców z klasy II B przedstawione są na diagramie.

- a) Oblicz średni wzrost chłopców z klasy II B (podaj wynik dokładny)
- b) Ilu chłopców z klasy II B ma wzrost wyższy od średniego?



▷ **Zadanie 4** (3 pkt)

Liczby 102, 105, 108, 111, ... , są kolejnymi, początkowymi wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego (a_n). Zapisz wzór ogólny na n -ty wyraz tego ciągu. Oblicz wyraz a_{81} .

▷ **Zadanie 5** (5 pkt)

Przed wejściem do przychodni lekarskiej znajdują się schody mające 8 stopni po 15 cm wysokości każdy. Postanowiono zbudować podjazd dla niepełnosprawnych o nachyleniu 7° . Oblicz długość podjazdu. Wynik podaj w zaokrągleniu do 10 cm.





▷ Zadanie 6 (3 pkt)

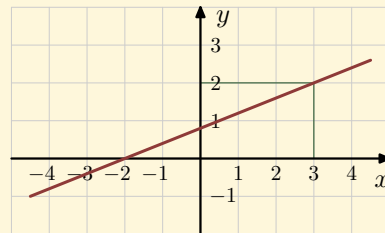
Ciąg (a_n) określony jest wzorem

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \\ a_{n+2} = 2^{n-1} + a_n + a_{n+1} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$$

Wyznacz czwarty wyraz tego ciągu.

▷ Zadanie 7 (5 pkt)

Rysunek przedstawia fragment wykresu funkcji liniowej f . Wykres funkcji g jest obrazem wykresu funkcji f otrzymanym za pomocą przesunięcia o wektor $\vec{u} = [2, 1]$. Wyznacz miejsce zerowe funkcji g .



▷ Zadanie 8 (3 pkt)

Składka na ubezpieczenie zdrowotne jest równa 7,5% podstawy wymiaru składek na ubezpieczenie społeczne. Podstawa wymiaru składek na ubezpieczenie społeczne jest równa 60% przeciętnego wynagrodzenia. Oblicz wysokość składki na ubezpieczenie zdrowotne przyjmując, że przeciętne wynagrodzenie jest równe 1869,76 zł. Wynik podaj w zaokrągleniu do 1 grosza.

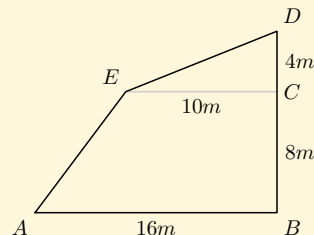
- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień





▷ **Zadanie 9** (3 pkt)

Oblicz pole działki rekreacyjnej, której plan przedstawiony jest na rysunku. Zakładamy, że kąty ABC i ECD są kątami prostymi.

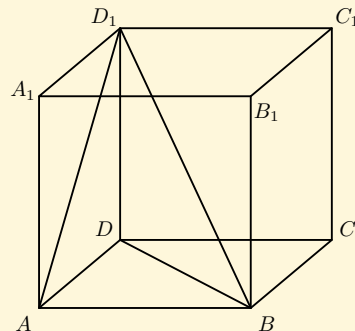


▷ **Zadanie 10** (2 pkt)

Kupując los loterii można wygrać nagrodę główną, którą jest zestaw płyt kompaktowych lub jedną z 10 nagród książkowych. Przy zakupie jednego losu prawdopodobieństwo wygrania nagrody książkowej jest równe $\frac{1}{7}$. Oblicz, ile losów jest pusty.

▷ **Zadanie 11** (4 pkt)

Podstawą prostopadłościanu $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ jest prostokąt o bokach długości: $|AD| = 3$ i $|AB| = 6$. Wysokość prostopadłościanu ma długość równą 6. Uzasadnij, za pomocą rachunków, że trójkąt BAD_1 jest prostokątny.





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



▷ Zadanie 1 (4 pkt)

Lewa strona równania $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots + x^{2n} + \dots = 3$ jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego o ilorazie x^2 . Z warunku zbieżności mamy $x^2 < 1$. Zatem dziedziną równania jest przedział $(-1, 1)$.

Równanie można zapisać w postaci $1 + x^2(1 + x^2 + x^4 + \dots) = 3$. Stąd $1 + 3x^2 = 3$.

Pierwiastkami ostatniego równania są liczby: $x_1 = -\frac{\sqrt{6}}{3}$, $x_2 = \frac{\sqrt{6}}{3}$ należące do dziedziny.

Odpowiedź: Rozwiązaniami równania są liczby $x_1 = -\frac{\sqrt{6}}{3}$, $x_2 = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Postępując w analogiczny sposób rozwiąż równanie: $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots = 2$.

Rozwiązanie:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots = 2$$

Lewa strona równania jest sumą **nieskończonego ciągu geometrycznego** o ilorazie x . Z warunku zbieżności mamy $x \in (-1, 1)$. Zatem dziedziną równania jest przedział $(-1, 1)$.

Równanie można zapisać w postaci $1 + x(1 + x + x^2 + \dots) = 2$. Stąd $1 + 2x = 2$.

Pierwiastkiem ostatniego równania jest liczba: $x = \frac{1}{2}$ należąca do dziedziny.

Odpowiedź: Rozwiązaniami równania jest liczba $x = \frac{1}{2}$.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

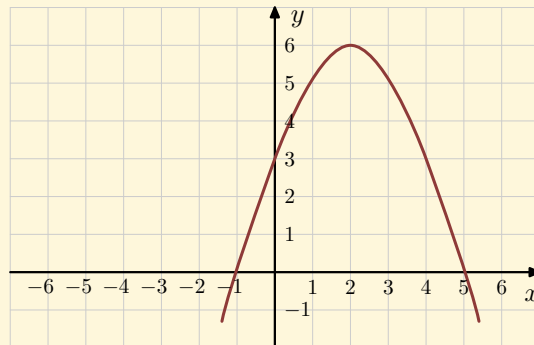


matma235@o2.pl

▷ Zadanie 2 (4 pkt)

Rysunek przedstawia fragment wykresu funkcji kwadratowej f .

- a) Podaj miejsce zerowe f .
- b) Podaj rozwiązanie nierówności $f(x) \leq 0$.
- c) Podaj rozwiązanie równania $f(x) = 3$



Rozwiązanie:

miejsca zerowe: $x_1 = -1$ $x_2 = 5$

$f(x) \leq 0$ dla $x \in (-\infty, -1) \cup \langle 5, \infty)$

$f(x) = 3$ dla $x = 0$ lub $x = 4$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

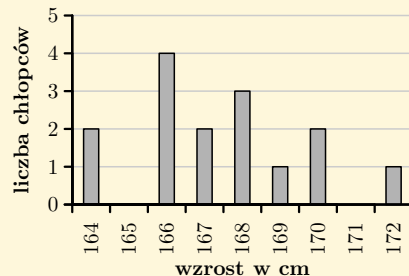


matma235@o2.pl

▷ Zadanie 3 (4 pkt)

Dane dotyczące wzrostu chłopców z klasy II B przedstawione są na diagramie.

- a) Oblicz średni wzrost chłopców z klasy II B (podaj wynik dokładny)
- b) Ilu chłopców z klasy II B ma wzrost wyższy od średniego?



Rozwiązanie:

- a) Oblicz średni wzrost chłopców z klasy II B (podaj wynik dokładny)

Liczba wszystkich chłopców:

$$2 + 4 + 2 + 3 + 1 + 2 + 1 = 15$$

Suma wszystkich wzrostów chłopców:

$$2 \cdot 164 + 4 \cdot 166 + 2 \cdot 167 + 3 \cdot 168 + 1 \cdot 169 + 2 \cdot 170 + 1 \cdot 172 = 668$$

Odp. Średni wzrost chłopców: $h = \frac{668}{15} = 167,4 \text{ cm}$

- b) Ilu chłopców z klasy II B ma wzrost wyższy od średniego?

Liczba chłopców o wzroście większym od 167,4 cm:

$$3 + 1 + 2 + 1 = 7$$

Odp. Siedmiu chłopców ma wzrost większy od średniego.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



▷ Zadanie 4 (3 pkt)

Liczby 102, 105, 108, 111, ... , są kolejnymi, początkowymi wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego (a_n) . Zapisz wzór ogólny na n -ty wyraz tego ciągu. Oblicz wyraz a_{81} .

Rozwiązanie:

ciąg arytmetyczny

pierwszy wyraz: $a_1 = 102$

różnica ciągu: $r = 3$

n -ty wyraz: $a_n = a_1 + (n - 1)r = 102 + (n - 1) \cdot 3 = 102 + 3n - 3 = 3n + 99$

$a_{81} = 3 \cdot 81 + 99 = 243 + 99 = 342$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

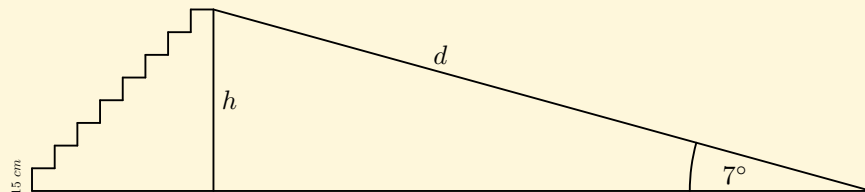


matma235@o2.pl

▷ Zadanie 5 (5 pkt)

Przed wejściem do przychodni lekarskiej znajdują się schody mające 8 stopni po 15 cm wysokości każdy. Postanowiono zbudować podjazd dla niepełnosprawnych o nachyleniu 7° . Oblicz długość podjazdu. Wynik podaj w zaokrągleniu do 10 cm.

Rozwiązanie:



Wysokość podjazdu: $h = 8 \cdot 15 \text{ cm} = 120 \text{ cm}$

$$\triangleright \sin 7^\circ = \frac{h}{d}$$

$$\triangleright 0,1219 = \frac{120}{d} \quad / \cdot d$$

$$0,1219d = 120 \quad / \cdot 0,1219$$

$$d = 984,413$$

Odp. Długość podjazdu w zaokrągleniu do 10 cm to 980 cm.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



▷ Zadanie 6 (3 pkt)

Ciąg (a_n) określony jest wzorem

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \\ a_{n+2} = 2^{n-1} + a_n + a_{n+1} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$$

Wyznacz czwarty wyraz tego ciągu.

Rozwiązanie:

$$a_3 = a_{1+2} = 2^{1-1} + a_1 + a_{1+1} = 2^0 + a_1 + a_2 = 1 + 1 + 2 = 4$$

$$a_4 = a_{2+2} = 2^{2-1} + a_2 + a_{2+1} = 2^1 + a_2 + a_3 = 2 + 2 + 4 = 8$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

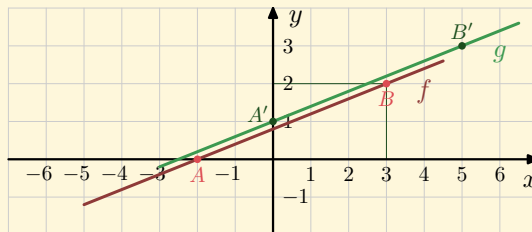


matma235@o2.pl

▷ Zadanie 7 (5 pkt)

Rysunek przedstawia fragment wykresu funkcji liniowej f . Wykres funkcji g jest obrazem wykresu funkcji f otrzymanym za pomocą przesunięcia o wektor $\vec{u} = [2, 1]$. Wyznacz miejsce zerowe funkcji g .

Rozwiązanie:



Przesuwając $A = (-2, 0)$ o wektor $\vec{u} = [2, 1]$ otrzymujemy $A' = (0, 1)$

Przesuwając $B = (3, 2)$ o wektor $\vec{u} = [2, 1]$ otrzymujemy $B' = (5, 3)$

Równanie prostej przechodzącej przez punkty $A' = (x_A, y_A)$, $B' = (x_B, y_B)$:

$$(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$$

dla $A' = (0, 1)$ i $B' = (5, 3)$

$$(y - 1)(5 - 0) - (3 - 1)(x - 0) = 0$$

$$(y - 1)5 - 2x = 0$$

$$5y - 5 - 2x = 0$$

dalej



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$5y = 2x + 5 \quad / : 5$$

$$y = \frac{2}{5}x + 1$$

Wzór funkcji g : $y = \frac{2}{5}x + 1$

Wyznaczamy **miejsce zerowe**

$$0 = \frac{2}{5}x + 1$$

$$-\frac{2}{5}x = 1 \quad / : \left(-\frac{2}{5}\right)$$

$$x = -1 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)$$

$$x = -2\frac{1}{2}$$

Odp. $x_0 = -2\frac{1}{2}$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



▷ Zadanie 8 (3 pkt)

Składka na ubezpieczenie zdrowotne jest równa 7,5% podstawy wymiaru składek na ubezpieczenie społeczne. Podstawa wymiaru składek na ubezpieczenie społeczne jest równa 60% przeciętnego wynagrodzenia. Oblicz wysokość składki na ubezpieczenie zdrowotne przyjmując, że przeciętne wynagrodzenie jest równe 1869,76 zł. Wynik podaj w zaokrągleniu do 1 grosza.

Rozwiązanie:

Podstawa wymiaru składki na ubezpieczenie zdrowotne:

$$60\% \cdot 1869,76 = \frac{60}{100} \cdot 1869,76 = 1121,856 \approx 1121,86$$

Składka na ubezpieczenie zdrowotne:

$$7,5\% \cdot 1121,86 = \frac{7,5}{100} \cdot 1121,86 = 84,1394 \approx 84,14$$

Odp. Składka na ubezpieczenie zdrowotne wynosi 84zł 14gr.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

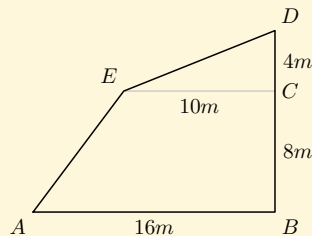
13 kwiecień



matma235@o2.pl

▷ Zadanie 9 (3 pkt)

Oblicz pole działki rekreacyjnej, której plan przedstawiony jest na rysunku. Zakładamy, że kąty ABC i ECD są kątami prostymi.



Rozwiązanie:

Pole trójkąta ECD : $P = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 20 \text{ m}^2$

Pole trapezu $ABCE$: $P = \frac{(16 + 10) \cdot 8}{2} = 104 \text{ m}^2$

Pole całej działki: $P = 20 + 104 = 124 \text{ m}^2$

Odp. Działka rekreacyjna ma pole 124 m^2 .



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zadanie 10 (2 pkt)

Kupując los loterii można wygrać nagrodę główną, którą jest zestaw płyt kompaktowych lub jedną z 10 nagród książkowych. Przy zakupie jednego losu prawdopodobieństwo wygrania nagrody książkowej jest równe $\frac{1}{7}$. Oblicz, ile losów jest pustych.

Rozwiązanie:

n – liczba wszystkich losów

$\frac{10}{n}$ – prawdopodobieństwo wygrania jednej nagrody książkowej

$$\frac{10}{n} = \frac{1}{7} \quad / \cdot n$$

$$10 = \frac{1}{7}n \quad / \cdot 7$$

$$70 = n$$

$$n = 70$$

Wszystkich losów jest 70. Za pomocą 11 losów można wygrać nagrodę, zatem losów pustych jest $70 - 11 = 59$.

Odp. Losów pustych jest 59.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

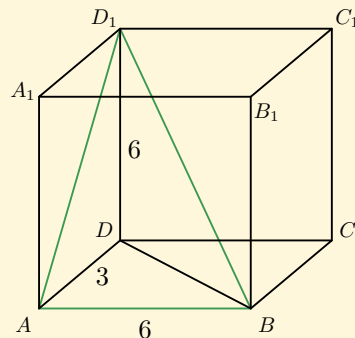
13 kwiecień



matma235@o2.pl

▷ Zadanie 11 (4 pkt)

Podstawą prostopadłościanu $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ jest prostokąt o bokach długości: $|AD| = 3$ i $|AB| = 6$. Wysokość prostopadłościanu ma długość równą 6. Uzasadnij, za pomocą rachunków, że trójkąt BAD_1 jest prostokątny.



Rozwiązanie:

wyznaczyć przekątną podstawy: $|BD| = 3\sqrt{5}$

wyznaczyć przekątną sześcianu: $|BD_1| = 9$

wyznaczyć przekątną ściany bocznej: $|AD_1| = 3\sqrt{5}$

Trójkąt ABD_1 jest prostokątny, jeżeli jego boki spełniają twierdzenie Pitagorasa:

$$|AB|^2 + |AD_1|^2 = |BD_1|^2$$

$$6^2 + (3\sqrt{5})^2 = 9^2$$

$$36 + 45 = 81$$

$$81 = 81$$

Odp. Boki trójkąta ABD_1 spełniają twierdzenie Pitagorasa, zatem jest to trójkąt prostokątny.



spis treści

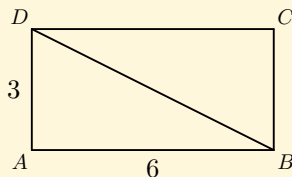
symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl



Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa

$$6^2 + 3^2 = |BD|^2$$

$$36 + 9 = |BD|^2$$

$$|BD|^2 = 45$$

$$|BD| = \sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5}$$

$$|BD| = 3\sqrt{5}$$



spis treści

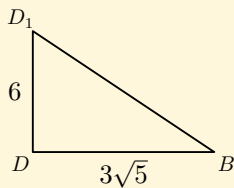
symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl



Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa

$$(3\sqrt{5})^2 + 6^2 = |BD_1|^2$$

$$45 + 36 = |BD_1|^2$$

$$|BD_1|^2 = 81$$

$$|BD_1| = \sqrt{81}$$

$$|BD_1| = 9$$



spis treści

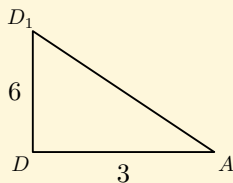
symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl



Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa

$$3^2 + 6^2 = |AD_1|^2$$

$$9 + 36 = |AD_1|^2$$

$$|AD_1|^2 = 45$$

$$|AD_1| = \sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5}$$

$$|AD_1| = 3\sqrt{5}$$

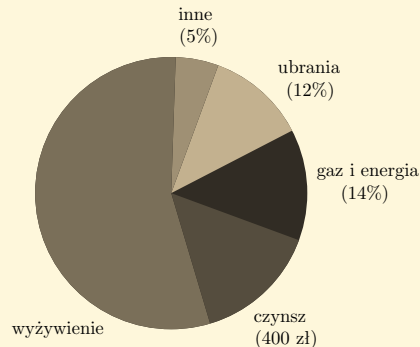


▷ **Zadanie 1** (3 pkt)

Powierzchnia prostokątnej działki budowlanej równa się 1540 m^2 . Oblicz wymiary tej działki wiedząc, że różnią się one o 9 m .

▷ **Zadanie 2** (4 pkt)

Na wspólne konto państwa Kowalskich wpływają pieniądze z ich dwóch pensji miesięcznych, razem jest to kwota 3200 złotych. Na początku każdego miesiąca małżonkowie dzielą całość tej kwoty. Na diagramie kołowym pokazano strukturę planowanych, przez państwa Kowalskich, miesięcznych wydatków.



Korzystając z tych danych:

- Oblicz, ile procent danej kwoty stanowią miesięczne wydatki państwa Kowalskich na wyżywienie.
- Oblicz, ile pieniędzy wydają państwo Kowalscy w ciągu miesiąca łącznie, na gaz i energię oraz czynsz.

- o spis treści
- o symbole
- o zgłoś błąd
- o 13 kwiecień





▷ **Zadanie 3** (3 pkt)

Upraszczając pierwiastek kwadratowy z liczby $27 + 10\sqrt{2}$, zapiszemy ją w postaci kwadratu sumy dwóch liczb. Postępujemy następująco:

$$\begin{aligned}\sqrt{27 + 10\sqrt{2}} &= \sqrt{25 + 10\sqrt{2} + 2} = \\ &= \sqrt{5^2 + 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{(5 + \sqrt{2})^2} = 5 + \sqrt{2}\end{aligned}$$

Przeanalizuj ten przykład, a następnie, stosując analogiczne postępowanie, uprość $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$.

▷ **Zadanie 4** (4 pkt)

Równanie prostej $C = \frac{5}{9} \cdot F - \frac{160}{9}$, ustala zależność między temperaturą wyrażoną w stopniach Celsjusza (C) oraz Fahrenheita (F).

- Oblicz, ile stopni w skali Fahrenheita (F), ma wrząca w temperaturze 100° woda.
- Wyznacz taką temperaturę, przy której liczba stopni w skali Celsjusza jest równa liczbie stopni w skali Fahrenheita.

▷ **Zadanie 5** (4 pkt)

Dany jest trójkąt, którego dwa boki mają długości 8 cm i 12 cm, kąt zawarty między tymi bokami ma miarę 120° . Oblicz długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień





▷ Zadanie 6 (5 pkt)

Do pewnego przepisu z książki kucharskiej należy przygotować 0,25 litra płynu. Mamy do wyboru trzy szklanki w kształcie walca o wewnętrznych wymiarach: pierwsza o średnicy – 6 cm i wysokości 10 cm, druga – o średnicy 5,8 cm i wysokości 9,5 cm oraz trzecia – o średnicy 6 cm i wysokości 9 cm.

Ktorej szklanki objętość jest najbliższa 0,25 litra? Odpowiedź uzasadnij.

▷ Zadanie 7 (6 pkt)

Funkcja $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ jest określona wzorem: $f(x) = x^2 - 6x + 12$.

- Rozwiąż nierówność $f(x) - 19 > 0$.
- Uzasadnij, że obrazem wykresu funkcji f , w symetrii względem prostej o równaniu $x = 6$, nie jest parabola, określona równaniem $y = (x - 9)^2 + 6$

▷ Zadanie 8 (3 pkt)

Spośród wszystkich wierzchołków sześcianu wybieramy jednocześnie trzy wierzchołki. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że otrzymamy wierzchołki trójkąta równobocznego.

▷ Zadanie 9 (3 pkt)

Wykaż, że w trójkącie prostokątnym suma kwadratów sinusów miar wszystkich jego kątów wewnętrznych równa się 2.

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień





▷ **Zadanie 10** (5 pkt)

Wszystkie liczby naturalne dwucyfrowe, podzielne przez 6 są wyrazmi pewnego ciągu rosnącego.

- Zapisz wzór ogólny na n -ty wyraz tego ciągu arytmetycznego.
- Oblicz, ile wyrazów ma ten ciąg.
- Oblicz sumę piętnastu początkowych kolejnych wyrazów tego ciągu

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

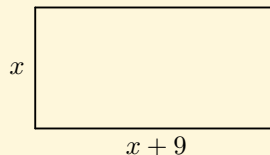


matma235@o2.pl

▷ Zadanie 1 (3 pkt)

Powierzchnia prostokątnej działki budowlanej równa się $1540 m^2$. Oblicz wymiary tej działki wiedząc, że różnią się one o $9 m$.

Rozwiązanie:



$$\begin{aligned}x(x + 9) &= 1540 \\x^2 + 9x - 1540 &= 0\end{aligned}$$

Rozwiązujemy **równanie kwadratowe**

$$\Delta = 9^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1540) = 81 + 6160 = 6241 \quad \sqrt{\Delta} = 79$$

$$x_1 = \frac{-9 - 79}{2} = \frac{-88}{2} = -44 \quad x_2 = \frac{-9 + 79}{2} = \frac{70}{2} = 35$$

Długość nie może być liczbą ujemną więc jedyne poprawne rozwiązanie to:

$$x = 35 \quad x + 9 = 44$$

Odp. Działka ma wymiary $35 m$ na $44 m$.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

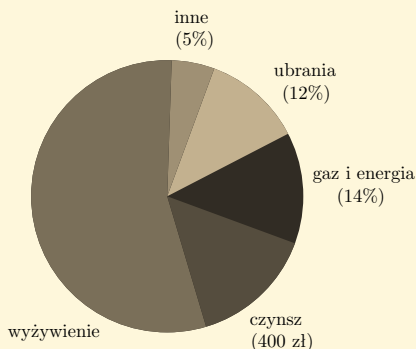
13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zadanie 2 (4 pkt)

Na wspólne konto państwa Kowalskich wpływają pieniądze z ich dwóch pensji miesięcznych, razem jest to kwota 3200 złotych. Na początku każdego miesiąca małżonkowie dzielą całość tej kwoty. Na diagramie kołowym pokazano strukturę planowanych, przez państwa Kowalskich, miesięcznych wydatków.



Korzystając z tych danych:

- Oblicz, ile procent danej kwoty stanowią miesięczne wydatki państwa Kowalskich na wyżywienie.
- Oblicz, ile pieniędzy wydają państwo Kowalscy w ciągu miesiąca łącznie, na gaz i energię oraz czynsz.

Rozwiązanie:

Na początek obliczymy jaki procent 3200 zł stanowi czynsz – 400 zł.

$$\frac{400}{3200} = \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \cdot 100\% = 12,5\%$$

Procent jaki stanowią miesięczne wydatki na wyżywienie:

$$100\% - (5\% + 12\% + 14\% + 12,5\%) = 100\% - 43,5\% = 56,5\%$$

Odp. Na wyżywienie Kowalscy przeznaczają 56,5%.

dalej

Na gaz i energię Kowalscy wydają:

$$14\% \text{ z } 3200 = \frac{14}{100} \cdot 3200 = 448$$

Razem z czynszem $448 + 400 = 848$ zł.

Odp. Kowalscy wydają na czynsz, gaz i energię łącznie 848 zł.

- 
- spis treści
 - symbole
 - zgłoś błąd
 - 13 kwiecień



matma235@o2.pl



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



▷ Zadanie 3 (3 pkt)

Upraszczając pierwiastek kwadratowy z liczby $27 + 10\sqrt{2}$, zapiszemy ją w postaci kwadratu sumy dwóch liczb. Postępujemy następująco:

$$\begin{aligned}\sqrt{27 + 10\sqrt{2}} &= \sqrt{25 + 10\sqrt{2} + 2} = \\ &= \sqrt{5^2 + 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{(5 + \sqrt{2})^2} = 5 + \sqrt{2}\end{aligned}$$

Przeanalizuj ten przykład, a następnie, stosując analogiczne postępowanie, uprość $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} &= \sqrt{9 + 6\sqrt{2} + 2} = \\ &= \sqrt{3^2 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{(3 + \sqrt{2})^2} = 3 + \sqrt{2}\end{aligned}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



▷ Zadanie 4 (4 pkt)

Równanie prostej $C = \frac{5}{9} \cdot F - \frac{160}{9}$, ustala zależność między temperaturą wyrażoną w stopniach Celsjusza (C) oraz Fahrenheita (F).

- Oblicz, ile stopni w skali Fahrenheita (F), ma wrząca w temperaturze 100° woda.
- Wyznacz taką temperaturę, przy której liczba stopni w skali Celsjusza jest równa liczbie stopni w skali Fahrenheita.

Rozwiązanie:

- Oblicz, ile stopni w skali Fahrenheita (F), ma wrząca w temperaturze 100° woda.

$$C = \frac{5}{9} \cdot F - \frac{160}{9}$$

$$100 = \frac{5}{9} \cdot F - \frac{160}{9} \quad / \cdot 9$$

$$900 = 5F - 160$$

$$900 + 160 = 5F$$

$$1060 = 5F \quad / : 5$$

$$F = 212$$

Odp. Woda wrze w 212 stopniach Fahrenheita.

dalej



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



b) Wyznacz taką temperaturę, przy której liczba stopni w skali Celsjusza jest równa liczbie stopni w skali Fahrenheita.

$$C = F$$

$$C = \frac{5}{9} \cdot C - \frac{160}{9} \quad / \cdot 9$$

$$9C = 5C - 160$$

$$4C = -160 \quad / : 4$$

$$C = -40$$

Odp. Temperatura -40 stopni Celsjusza jest równa liczbie stopni w skali Fahrenheita.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

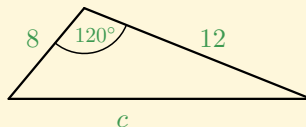


matma235@o2.pl

▷ Zadanie 5 (4 pkt)

Dany jest trójkąt, którego dwa boki mają długości 8 cm i 12 cm, kąt zawarty między tymi bokami ma miarę 120° . Oblicz długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.

Rozwiązanie:



$$c = 4\sqrt{19}$$

liczymy promień okręgu opisanego na trójkącie:

$$R = \frac{4\sqrt{19}}{2 \sin 120^\circ}$$

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) \stackrel{\triangleright}{=} \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$R = \frac{4\sqrt{19}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$R = \frac{4\sqrt{19}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$R = \frac{4\sqrt{57}}{3}$$



spis treści

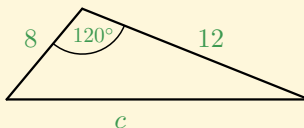
symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl



W celu obliczenia c korzystamy z twierdzenia cosinusów

$$c^2 = 8^2 + 12^2 - 2 \cdot 8 \cdot 12 \cdot \cos 120^\circ$$

$$c^2 = 64 + 144 - 192 \cdot \cos 120^\circ$$

$$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) \stackrel{!}{=} -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$c^2 = 208 - 192 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$c^2 = 208 + 96$$

$$c^2 = 304$$

$$c = \sqrt{304} = \sqrt{16 \cdot 19}$$

$$c = 4\sqrt{19}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

▷ Zadanie 6 (5 pkt)

Do pewnego przepisu z książki kucharskiej należy przygotować 0,25 litra płynu. Mamy do wyboru trzy szklanki w kształcie walca o wewnętrznych wymiarach: pierwsza o średnicy – 6 cm i wysokości 10 cm, druga – o średnicy 5,8 cm i wysokości 9,5 cm oraz trzecia – o średnicy 6 cm i wysokości 9 cm.

Której szklanki objętość jest najbliższa 0,25 litra? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie:

$$1\text{ liter} = 1000\text{ cm}^3$$

$$0,25\text{ l} = 0,25 \cdot 1000\text{ cm}^3 = 250\text{ cm}^3$$

objętość walca: $V = \pi r^2 \cdot h$

$$r_1 = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3\text{ cm}$$

$$h_1 = 10\text{ cm}$$

$$V_1 = \pi \cdot 3^2 \cdot 10$$

$$V_1 \approx 3,14 \cdot 90$$

$$V_1 \approx 282,6\text{ cm}^3$$

$$r_2 = \frac{1}{2} \cdot 5,8 = 2,9\text{ cm}$$

$$h_2 = 9,5\text{ cm}$$

$$V_2 = \pi \cdot 2,9^2 \cdot 9,5$$

$$V_2 \approx 3,14 \cdot 9 \approx 79,895$$

$$V_2 \approx 250,9\text{ cm}^3$$

$$r_3 = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3\text{ cm}$$

$$h_3 = 9\text{ cm}$$

$$V_3 = \pi \cdot 3^2 \cdot 9$$

$$V_3 \approx 3,14 \cdot 81$$

$$V_3 \approx 254,3\text{ cm}^3$$

Odp. Szklanka o średnicy 5,8 cm i wysokości 9,5 cm ma objętość $V \approx 250,9\text{ cm}^3$, która jest najbliższa 0,25 litra.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

▷ Zadanie 7 (6 pkt)

Funkcja $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ jest określona wzorem: $f(x) = x^2 - 6x + 12$.

- a) Rozwiąż nierówność $f(x) - 19 > 0$.
b) Uzasadnij, że obrazem wykresu funkcji f , w symetrii względem prostej o równaniu $x = 6$, nie jest parabola, określona równaniem $y = (x - 9)^2 + 6$

Rozwiązanie:

- a) Rozwiąż nierówność $f(x) - 19 > 0$.

nierówności kwadratowe

$$f(x) - 19 > 0$$

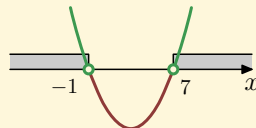
$$x^2 - 6x + 12 - 19 > 0$$

$$x^2 - 6x - 7 > 0$$

znajdujemy pierwiastki

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7) = 36 + 28 = 64 \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{64} = 8$$

$$x_1 = \frac{-(-6) - 8}{2 \cdot 1} = \frac{6 - 8}{2} = -1 \quad x_2 = \frac{-(-6) + 8}{2 \cdot 1} = \frac{6 + 8}{2} = 7$$



$$x \in (-\infty, -1) \cup (7, \infty)$$

dalej

spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

b) Uzasadnij, że obrazem wykresu funkcji f , w symetrii względem prostej o równaniu $x = 6$, nie jest parabola, określona równaniem $y = (x - 9)^2 + 6$

Znajdujemy **współrzędne wierzchołka** wykresu $f(x) = x^2 - 6x + 12$

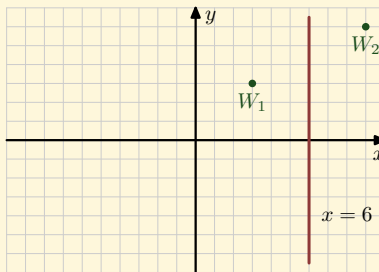
$$p = \frac{-(-6)}{2 \cdot 1} = 3$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 36 - 48 = -12$$

$$q = \frac{-(-12)}{4 \cdot 1} = 3$$

$$W_1(3, 3)$$

Współrzędne wierzchołka wykresu $y = (x - 9)^2 + 6$ to $W_2(9, 6)$.



Jak widać na wykresie, wierzchołki W_1 i W_2 nie są do siebie symetryczne względem prostej $x = 6$. Zatem obrazem wykresu funkcji f , w symetrii względem prostej o równaniu $x = 6$, nie jest parabola, określona równaniem $y = (x - 9)^2 + 6$.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

▷ Zadanie 8 (3 pkt)

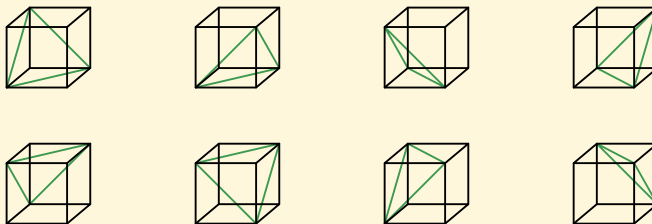
Spośród wszystkich wierzchołków sześcianu wybieramy jednocześnie trzy wierzchołki. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że otrzymamy wierzchołki trójkąta równobocznego.

Rozwiązanie:

Sześcian ma 8 wierzchołków, z których 3 różne wierzchołki możemy wybrać na tyle sposobów:

$$\overline{\Omega} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{(8-3)! \cdot 3!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{5! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{336}{6} = 56$$

W ten sposób możemy otrzymać maksymalnie 8 trójkątów równobocznych:



Prawdopodobieństwo otrzymania wierzchołków trójkąta równobocznego:

$$P(A) = \frac{\overline{A}}{\overline{\Omega}} = \frac{8}{56} = \frac{1}{7}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

▷ Zadanie 9 (3 pkt)

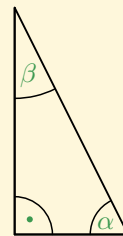
Wykaż, że w trójkącie prostokątnym suma kwadratów sinusów miar wszystkich jego kątów wewnętrznych równa się 2.

Rozwiązanie:

Mamy wykazać:

$$\sin^2 90^\circ + \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 2$$

kąty w trójkącie



$$90^\circ + \alpha + \beta = 180^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - 90^\circ - \alpha$$

$$\beta = 90^\circ - \alpha$$

$$\sin^2 90^\circ + \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 2$$

Przekształcając lewą stronę udowadniamy, że jest równa prawej:

$$\begin{aligned} L &= \sin^2 90^\circ + \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \\ &= \sin^2 90^\circ + \sin^2 \alpha + \sin^2 (90^\circ - \alpha) = \end{aligned}$$

$$\sin 90^\circ \stackrel{\triangleright}{=} 1$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) \stackrel{\triangleright}{=} \cos \alpha$$

$$= 1^2 + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \triangleright$$

$$= 1 + 1 = 2 = P$$

$$L = P$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

▷ Zadanie 10 (5 pkt)

Wszystkie liczby naturalne dwucyfrowe, podzielne przez 6 są wyrazami pewnego ciągu rosnącego.

- Zapisz wzór ogólny na n -ty wyraz tego ciągu arytmetycznego.
- Oblicz, ile wyrazów ma ten ciąg.
- Oblicz sumę piętnastu początkowych kolejnych wyrazów tego ciągu

Rozwiązanie:

- Zapisz wzór ogólny na n -ty wyraz tego ciągu arytmetycznego.

Liczby dwucyfrowe podzielne przez 6 tworzą **ciąg arytmetyczny**

$$12, 18, 24, \dots, 90, 96$$

$a_1 = 12$ – pierwszy wyraz ciągu

$r = 6$ – różnica ciągu

wzór ogólny na n -ty wyraz tego ciągu arytmetycznego:

$$a_n = 12 + (n - 1) \cdot 6$$

$$a_n = 12 + 6n - 6$$

$$a_n = 6n + 6$$

Odp. Wzór ogólny tego ciągu arytmetycznego $a_n = 6n + 6$.

dalej



matma235@o2.pl

b) Oblicz, ile wyrazów ma ten ciąg.

12, 18, 24, ..., 90, 96

n - ty wyraz tego ciągu arytmetycznego

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

$$96 = 12 + (n - 1) \cdot 6$$

$$96 = 12 + 6n - 6$$

$$96 - 12 + 6 = 6n$$

$$6n = 90 \quad / : 6$$

$$n = 15$$

Odp. Ciąg ten ma 15 wyrazów.

c) Oblicz sumę piętnastu początkowych kolejnych wyrazów tego ciągu
suma wyrazów ciągu arytmetycznego

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S = \frac{12 + 96}{2} \cdot 15$$

$$S = 810$$



▷ **Zadanie 1** (3 pkt)

Dana jest prosta l o równaniu $y = \frac{3}{2}x - \sqrt{2}$ oraz punkt $A = (-3, -2)$. Wykres funkcji liniowej f jest prostopadły do prostej l , punkt A należy do wykresu funkcji f .

Wyznacz

- wzór funkcji f ,
- miejsce zerowe funkcji f .

▷ **Zadanie 2** (3 pkt)

Dany jest wektor $\overrightarrow{AB} = [-3, 4]$ oraz punkt $A = (1, -2)$. Oblicz:

- współrzędne punktu B ,
- współrzędne i długość wektora $\vec{v} = -2 \cdot \overrightarrow{AB}$.

▷ **Zadanie 3** (3 pkt)

W klasie liczącej 30 uczniów, dziewięciu obejrzało film pt. „Nasz XXI wiek”. Wychowawca klasy otrzymał 4 bilety i zamierza wylosować uczniów, których zaprosi na projekcję tego filmu. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wśród czterech wylosowanych z tej klasy uczniów nie ma ucznia, który już ten film oglądał.

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień





▷ Zadanie 4 (5 pkt)

W pewnej szkole średniej po pierwszym półroczu przeprowadzono test z matematyki. Tabela przedstawia wyniki testu:

Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczba uczniów	10	30	80	30	25	5

- Sporządź diagram słupkowy przedstawiający zestawienie wyników testów.
- Oblicz średnią arytmetyczną uzyskanych ocen.
- Oblicz, ilu uczniów uzyskało ocenę wyższą od średniej arytmetycznej ocen.

▷ Zadanie 5 (4 pkt)

Ania przeczytała książkę science-fiction w ciągu 13 dni, przy czym każdego dnia czytała o taką samą liczbę stron więcej, niż w dniu poprzednim. Ile stron miała ta książka, jeżeli wiadomo, że w trzecim dniu Ania przeczytała 28 stron a w ostatnim 68?

▷ Zadanie 6 (3 pkt)

Jeżeli $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ i $x_3 = -1$ są miejscami zerowymi wielomianu $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, gdzie $a \neq 0$ oraz $W(4) = 2$, to współczynnik a można wyznaczyć postępując w następujący sposób:

Wielomian W zapisujemy w postaci iloczynowej: $W(x) = a(x - 2)(x - 3)(x + 1)$ i wykorzystując warunek $W(4) = 2$ otrzymujemy równanie: $2 = a(4 - 2)(4 - 3)(4 + 1)$, stąd $a = \frac{1}{5}$.

Postępując analogicznie, wyznacz współczynnik a wielomianu $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, wiedząc, że jego miejsca zerowe to $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ oraz $W(-1) = 3$.

spis treści
symbole
zgłoś błąd
13 kwiecień





▷ Zadanie 7 (4 pkt)

Planując czterotygodniowe wakacje, rodzina Kowalskich przeznaczyła pewną kwotę na wyżywienie. W pierwszym tygodniu wydano 30% zaplanowanej kwoty, w drugim tygodniu o 60 złoty mniej niż w pierwszym, w trzecim połowę reszty pieniędzy. Na czwarty tydzień zostało 270 złotych. Oblicz kwotę, którą rodzina Kowalskich przeznaczyła na wyżywienie.

▷ Zadanie 8 (5 pkt)

Funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx - 3$, gdzie $b > 0$ posiada dwa różne miejsca zerowe, których iloczyn jest równy (-3) . Wiedząc, że funkcja ta przyjmuje najmniejszą wartość równą (-4) , wyznacz:

- współczynnik a i b ,
- miejsca zerowe funkcji f .

▷ Zadanie 9 (5 pkt)

Zaplanowano zalesić ugór w kształcie trójkąta równoramiennego, którego długość najdłuższego boku, na planie w skali 1:1500, jest równy 12 cm i jeden z kątów ma miarę 120° . W szkółce leśnej zamówiono sadzonki, w ilości pozwalającej obsadzić obszar wielkości 40 arów. Oblicz, czy zamówiono ilość sadzonek jest wystarczająca do zalesienia ugoru.

▷ Zadanie 10 (5 pkt)

Dane są dwie bryły: stożek, w którym długość promienia podstawy jest równa 4 dm i wysokość ma długość $\frac{18}{\pi}$ dm oraz ostrosłup prawidłowy czworokątny, w którym krawędź podstawy ma długość $4\sqrt{3}$ dm. Wiedząc, że objętości tych brył są równe, wyznacz kąt nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do podstawy.





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

▷ Zadanie 1 (3 pkt)

Dana jest prosta l o równaniu $y = \frac{3}{2}x - \sqrt{2}$ oraz punkt $A = (-3, -2)$. Wykres funkcji liniowej f jest prostopadły do prostej l , punkt A należy do wykresu funkcji f .

Wyznacz

- wzór funkcji f ,
- miejsce zerowe funkcji f .

Rozwiązanie:

- wyznacz wzór funkcji f

$$y = ax + b$$

proste prostopadłe

$$a \cdot \frac{3}{2} = -1$$

$$a \cdot \frac{3}{2} = -1 \quad / : \frac{3}{2}$$

$$a = -1 \cdot \frac{2}{3}$$

$$a = -\frac{2}{3}$$

$$y = -\frac{2}{3}x + b$$

Podstawiamy współrzędne punktu $A = (-3, -2)$ do wzoru funkcji.

$$-2 = -\frac{2}{3} \cdot (-3) + b$$

$$-2 = 2 + b$$

$$-2 - 2 = b$$

$$b = -4$$

Odp. $y = -\frac{2}{3}x - 4$

dalej



b) miejsce zerowe funkcji f **miejsce zerowe**

$$0 = -\frac{2}{3}x - 4$$

$$\frac{2}{3}x = -4 \quad / : \frac{2}{3}$$

$$x = -4 \cdot \frac{3}{2}$$

$$x_0 = -6$$

Odp. Miejsce zerowe $x_0 = -6$.





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

▷ Zadanie 2 (3 pkt)

Dany jest wektor $\overrightarrow{AB} = [-3, 4]$ oraz punkt $A = (1, -2)$. Oblicz:

a) współrzędne punktu B ,

b) współrzędne i długość wektora $\vec{v} = -2 \cdot \overrightarrow{AB}$.

Rozwiązanie:

a) Oblicz współrzędne punktu B

$$A = (1, -2) \quad \overrightarrow{AB} = [-3, 4]$$

$$B = (1 + (-3), -2 + 4) = (-2, 2)$$

Odp. $B = (-2, 2)$

b) współrzędne i długość wektora $\vec{v} = -2 \cdot \overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = [-3, 4]$$

$$\vec{v} = -2 \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{v} = -2 \cdot [-3, 4]$$

$$\vec{v} = [6, -8]$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

Odp. $\vec{v} = [6, -8]$, $|\vec{v}| = 10$.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



▷ Zadanie 3 (3 pkt)

W klasie liczącej 30 uczniów, dziewięciu obejrzało film pt. „Nasz XXI wiek”. Wychowawca klasy otrzymał 4 bilety i zamierza wylosować uczniów, których zaprosi na projekcję tego filmu. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wśród czterech wylosowanych z tej klasy uczniów nie ma ucznia, który już ten film oglądał.

Rozwiązanie:

Na tyle sposobów można wylosować 4 uczniów z 30:

$$\overline{\Omega} = \binom{30}{4} = \frac{30!}{(30-4)! \cdot 4!} = \frac{26! \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30}{26! \cdot 24} = 27405$$

Film obejrzało 9 uczniów, czyli $30 - 9 = 21$ uczniów filmu nie obejrzało.

Na tyle sposobów można wybrać 4 z 21 uczniów:

$$\overline{A} = \binom{21}{4} = \frac{21!}{(21-4)! \cdot 4!} = \frac{17! \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21}{17! \cdot 24} = 5985$$

Prawdopodobieństwo wylosowania 4 osób, które nie oglądały filmu:

$$P(A) = \frac{\overline{A}}{\overline{\Omega}} = \frac{5985}{27405} = \frac{19}{87}$$

Odp. Prawdopodobieństwo wynosi $P(A) = \frac{19}{87}$.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

▷ Zadanie 4 (5 pkt)

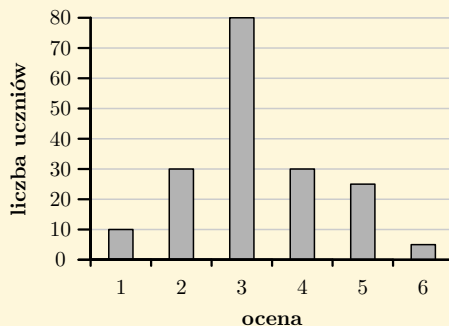
W pewnej szkole średniej po pierwszym półroczu przeprowadzono test z matematyki. Tabela przedstawia wyniki testu:

Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczba uczniów	10	30	80	30	25	5

- Sporządź diagram słupkowy przedstawiający zestawienie wyników testów.
- Oblicz średnią arytmetyczną uzyskanych ocen.
- Oblicz, ilu uczniów uzyskało ocenę wyższą od średniej arytmetycznej ocen.

Rozwiązanie:

- Sporządź diagram słupkowy przedstawiający zestawienie wyników testów.



dalej



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

b) Oblicz średnią arytmetyczną uzyskanych ocen.

Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczba uczniów	10	30	80	30	25	5

$$a = \frac{1 \cdot 10 + 2 \cdot 30 + 3 \cdot 80 + 4 \cdot 30 + 5 \cdot 25 + 6 \cdot 5}{10 + 30 + 80 + 30 + 25 + 5} = \frac{585}{180} = 3,25$$

Odp. Średnia arytmetyczna uzyskanych ocen to 3,25.

c) Oblicz, ilu uczniów uzyskało ocenę wyższą od średniej arytmetycznej ocen.

Uczniowie z ocenami 4, 5, 6 uzyskali ocenę wyższą od średniej. Uczniów tych jest $30 + 25 + 5 = 60$.

Odp. Uczniów z ocenami wyższymi od średniej jest 60.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

▷ Zadanie 5 (4 pkt)

Ania przeczytała książkę science-fiction w ciągu 13 dni, przy czym każdego dnia czytała o taką samą liczbę stron więcej, niż w dniu poprzednim. Ile stron miała ta książka, jeżeli wiadomo, że w trzecim dniu Ania przeczytała 28 stron a w ostatnim 68?

Rozwiązanie:

Liczby stron przeczytanych przez Anię każdego dnia, tworzą ciąg arytmetyczny.

W trzecim dniu Ania przeczytała 28 stron: $a_3 = 28$

W trzynastym dniu Ania przeczytała 68 stron: $a_{13} = 68$

Korzystamy z $a_n = a_1 + (n - 1)r$

$$\begin{cases} a_3 = 28 \\ a_{13} = 68 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + (3 - 1)r = 28 \\ a_1 + (13 - 1)r = 68 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + 2r = 28 \\ a_1 + 12r = 68 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 28 - 2r \\ 28 - 2r + 12r = 68 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 28 - 2r \\ 10r = 68 - 28 : 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 28 - 2 \cdot 4 \\ r = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 20 \\ r = 4 \end{cases}$$

$a_1 = 20$, czyli w pierwszym dniu Ania przeczytała 20 stron. Liczba stron w książce to suma ciągu arytmetycznego.

$$S = \frac{20 + 68}{2} \cdot 13 = 44 \cdot 13 = 572$$

Odp. Książka ma 572 strony.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

▷ Zadanie 6 (3 pkt)

Jeżeli $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ i $x_3 = -1$ są miejscami zerowymi wielomianu $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, gdzie $a \neq 0$ oraz $W(4) = 2$, to współczynnik a można wyznaczyć postępując w następujący sposób:

Wielomian W zapisujemy w postaci iloczynowej: $W(x) = a(x - 2)(x - 3)(x + 1)$ i wykorzystując warunek $W(4) = 2$ otrzymujemy równanie: $2 = a(4 - 2)(4 - 3)(4 + 1)$, stąd $a = \frac{1}{5}$.

Postępując analogicznie, wyznacz współczynnik a wielomianu $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, wiedząc, że jego miejsca zerowe to $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ oraz $W(-1) = 3$.

Rozwiązanie:

Wielomian $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ zapisujemy w postaci iloczynowej, wiedząc, że jego miejsca zerowe to $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ oraz $W(-1) = 3$.

$$W(x) = a(x - (-2))(x - 1)(x - 2)$$

$$W(x) = a(x + 2)(x - 1)(x - 2)$$

wykorzystując warunek $W(-1) = 3$ otrzymujemy równanie:

$$3 = a(-1 + 2)(-1 - 1)(-1 - 2)$$

$$3 = a \cdot 1 \cdot (-2) \cdot (-3)$$

$$3 = 6a \quad / : 6$$

$$\frac{3}{6} = a$$

$$a = \frac{1}{2}$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

▷ Zadanie 7 (4 pkt)

Planując czterotygodniowe wakacje, rodzina Kowalskich przeznaczyła pewną kwotę na wyżywienie. W pierwszym tygodniu wydano 30% zaplanowanej kwoty, w drugim tygodniu o 60 złoty mniej niż w pierwszym, w trzecim połowę reszty pieniędzy. Na czwarty tydzień zostało 270 złotych. Oblicz kwotę, którą rodzina Kowalskich przeznaczyła na wyżywienie.

Rozwiązanie:

x

– kwota przeznaczona na wyżywienie

$$30\% \text{ z } x = \frac{30}{100}x = 0,3x$$

– kwota wydana w pierwszym tygodniu

$$0,3x - 60$$

– kwota wydana w drugim tygodniu

$$x - (0,3x + (0,3x - 60))$$

– kwota która została Kowalskim po trzecim tygodniu

$$0,5 [x - (0,3x + (0,3x - 60))] \quad \text{– kwota wydana w trzecim tygodniu}$$

$$270$$

– kwota wydana w czwartym tygodniu

$$x = 0,3x + 0,3x - 60 + 0,5 [x - (0,3x + (0,3x - 60))] + 270$$

$$x = 0,6x - 60 + 0,5 [x - (0,6x - 60)] + 270$$

$$x = 0,6x - 60 + 0,5 [x - 0,6x + 60] + 270$$

$$x = 0,6x - 60 + 0,5 [0,4x + 60] + 270$$

$$x = 0,6x - 60 + 0,2x + 30 + 270$$

$$x = 0,8x + 240$$

$$x - 0,8x = 240$$

$$0,2x = 240 \quad / : 0,2$$

$$x = 1200$$

Odp. Rodzina Kowalskich przeznaczyła 1200 zł na wyżywienie.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

▷ Zadanie 8 (5 pkt)

Funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx - 3$, gdzie $b > 0$ posiada dwa różne miejsca zerowe, których iloczyn jest równy (-3) . Wiedząc, że funkcja ta przyjmuje najmniejszą wartość równą (-4) , wyznacz:

- współczynnik a i b ,
- miejsca zerowe funkcji f .

Rozwiązanie:

- wyznacz współczynnik a i b

$$f(x) = ax^2 + bx - 3$$

Korzystamy ze wzorów Viэта:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$-3 = \frac{-3}{a}$$

$$a = 1$$

$$f(x) = x^2 + bx - 3$$

Najmniejsza wartość **dana jest wzorem**:

$$q = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$-4 = -\frac{b^2 - 4ac}{4 \cdot 1} \quad / \cdot (-4)$$

$$16 = b^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)$$

dalej



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$16 = b^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)$$

$$16 = b^2 + 12$$

$$b^2 = 4$$

Przy założeniu $b > 0$ mamy rozwiązanie:

$$b = 2$$

$$f(x) = x^2 + 2x - 3$$

b) miejsca zerowe funkcji f .

równanie kwadratowe

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$$

$$x_1 = \frac{-2 - 4}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$x_2 = \frac{-2 + 4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Odp. Funkcja $f(x) = x^2 + 2x - 3$ ma miejsca zerowe $x_1 = -3$, $x_2 = 1$.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

▷ Zadanie 9 (5 pkt)

Zaplanowano zalesić ugor w kształcie trójkąta równoramiennego, którego długość najdłuższego boku, na planie w skali 1:1500, jest równy 12 cm i jeden z kątów ma miarę 120° . W szkółce leśnej zamówiono sadzonki, w ilości pozwalającej obsadzić obszar wielkości 40 arów. Oblicz, czy zamówiono ilość sadzonek jest wystarczająca do zalesienia ugoru.

Rozwiązanie:

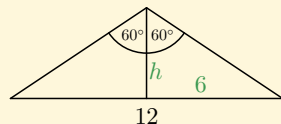
$$\triangleright \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{6}{h}$$

$$\triangleright \sqrt{3} = \frac{6}{h} \quad / \cdot h$$

$$h\sqrt{3} = 6 \quad / : \sqrt{3}$$

$$h = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3}$$

$$h = 2\sqrt{3} \approx 3,46$$



Skala 1:1500 oznacza, że 1 cm na planie to 1500 cm = 15 m w rzeczywistości

$$12 \cdot 15 \text{ m} = 180 \text{ m}$$

$$3,46 \cdot 15 \text{ m} = 51,9 \text{ m}$$

Ugor ma rzeczywistości wymiary 180 m na 51,9 m. Obliczmy jego pole:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 180 \cdot 51,9 = 4671 \text{ m}^2$$

1 ar = 100 m² zatem 40 ar = 40 · 100 m² = 4000 m².

Odp. Pole uguru jest większe od 40 arów, więc zamówiona ilość sadzonek jest niewystarczająca.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień

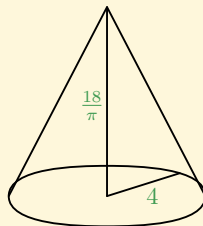


matma235@o2.pl

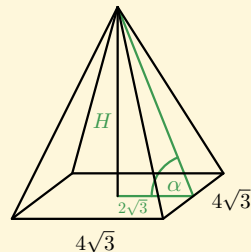
▷ Zadanie 10 (5 pkt)

Dane są dwie bryły: stożek, w którym długość promienia podstawy jest równa 4 dm i wysokość ma długość $\frac{18}{\pi}$ dm oraz ostrosłup prawidłowy czworokątny, w którym krawędź podstawy ma długość $4\sqrt{3}$ dm. Wiedząc, że objętości tych brył są równe, wyznacz kąt nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do podstawy.

Rozwiązanie:



$$\text{Objętość: } V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot \frac{18}{\pi} = 96$$



$$V = \frac{1}{3} (4\sqrt{3})^2 \cdot H = 16H$$

$$96 = 16H$$

$$H = 6$$

$$\triangleright \operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{2\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$\triangleright \alpha = 60^\circ$$

Odp. Ostrosłup jest nachylony do ściany bocznej pod kątem 60° .



▷ **Zadanie 1** (3 pkt)

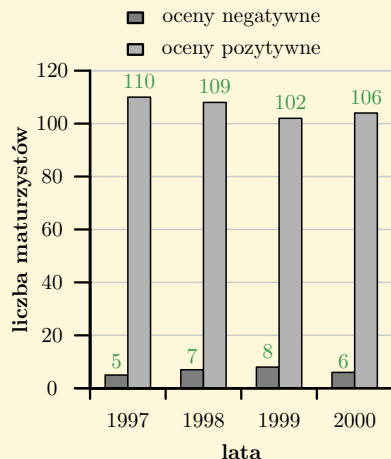
- a) Rozwiąż nierówność $x^2 < 4x$.
 b) Ze zbioru rozwiązań tej nierówności wybierz i wypisz wszystkie liczby naturalne.

▷ **Zadanie 2** (5 pkt)

Obok na wykresie, pokazano wyniki egzaminu maturalnego z matematyki w pewnej szkole, w ciągu ostatnich 4 lat.

Korzystając z tych danych:

- a) odczytaj i zapisz, w którym roku maturę z matematyki zdawało najwięcej uczniów. Ile ich było?
 b) oblicz, ile procent uczniów zdało maturę z matematyki w 2000 roku,
 c) oblicz, ile procent uczniów nie zdało matury z matematyki w ciągu całego omawianego okresu 4 lat.



▷ **Zadanie 3** (3 pkt)

Cena pewnego towaru wraz z 7% stawką podatku VAT była równa 64,20 złotych. Oblicz cenę tego towaru, gdyby stawka podatku VAT była równa 22% zamiast 7%.





▷ Zadanie 4 (3 pkt)

Aby obliczyć odsetki od kapitału bankowcy stosują następujący wzór:

$$\text{odsetki} = \text{liczba dni lokaty} \cdot \frac{\text{kapitał} \cdot \text{oprocentowanie}}{\text{liczba dni w roku}}$$

UWAGA: W zależności od banku przyjmuje się, że liczba dni w roku równa się 360 albo 365.

Notuję się wówczas odsetki_{360} albo odsetki_{365} .

Dysponujesz kapitałem 10 000 złotych, które chciałbyś ulokować na 60 dni. W dwóch bankach oprocentowanie jest takie samo i równa się 15%, zaś liczbę dni w roku jeden bank przyjmuje jako 360, drugi jako 365.

Stosując powyższy wzór oblicz odsetki od podanego kapitału w każdym z tych banków. Która lokata jest korzystniejsza i o ile złotych?

▷ Zadanie 5 (3 pkt)

W pewnym barze jeden pączek kosztuje p złotych, zaś jeden napój n złotych. Za 4 pączki i 5 napojów zapłacimy w tym barze 11,55 złotych.

a) Zapisz za pomocą równania koszt 4 pączków i 5 napojów w tym barze.

b) Oblicz, ile zapłacimy w tym barze za 1 napój, jeśli jeden pączek kosztuje 1,20 złotych.

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień





▷ Zadanie 6 (3 pkt)

W poniższej tabelce pokazano kurs sprzedaży marki niemieckiej w dniu 30.01.2001 r. w wybranych 50 kantorach w naszym kraju.

Kurs sprzedaży (w złotych)	1,99	2,01	2,02	2,05
Liczba kantorów	30	15	3	2

- Uwzględniając podane liczby kantorów, oblicz średni kurs sprzedaży marki niemieckiej w tym dniu.
- Podaj liczbę kantorów, w których tego dnia kurs sprzedaży marki niemieckiej był niższy od obliczonego średniego kursu sprzedaży.

▷ Zadanie 7 (3 pkt)

Pewna firma specjalizująca się w kopaniu studni, oferuje klientom następujący sposób obliczenia kosztu robót ziemnych:

wykopanie pierwszego metra głębokości studni kosztuje 300 złotych, zaś wykopanie każdego następnego metra głębokości kosztuje o 30 złotych więcej niż poprzedniego metra. Sprawdź, czy 7500 złotych wystarczy, aby zapłacić tej firmie za wydrążenie studni o głębokości 15 metrów.

▷ Zadanie 8 (4 pkt)

Ciąg liczbowy (a_n) jest określony wzorem $a_n = n + n^2$. Wykaż, że jest to ciąg rosnący.

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień





▷ Zadanie 9 (3 pkt)

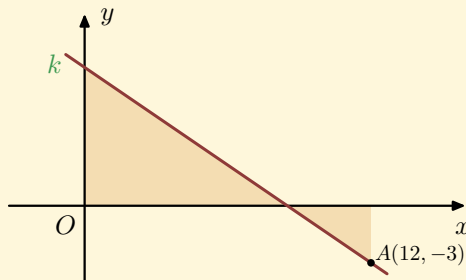
Wierzchołkami trójkąta ABC są punkty $A(-3, -4)$, $B(-2, 1)$, $C(3, 0)$.

- Sprawdź, że $|AB| = |BC|$.
- Uzasadnij, że kąt ABC jest kątem prostym.

▷ Zadanie 10 (3 pkt)

Na okręgu dany jest zbiór 5 różnych punktów. Ile jest różnych wielokątów, których wierzchołki należą do danego zbioru? (Wielokąty są różne, jeżeli różnią się przynajmniej jednym wierzchołkiem.)

▷ Zadanie 11 (3 pkt)



Na rysunku powyżej, prosta k przechodzi przez punkt $A(12, -3)$. Wiedząc, że stosunek pól obu zakreślonych trójkątów jest równy 4:

- oblicz sumę pól tych trójkątów,
- wyznacz równanie prostej k .

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

▷ Zadanie 1 (3 pkt)

a) Rozwiąż nierówność $x^2 < 4x$.

b) Ze zbioru rozwiązań tej nierówności wybierz i wypisz wszystkie liczby naturalne.

Rozwiązanie

a) Rozwiąż nierówność $x^2 < 4x$.

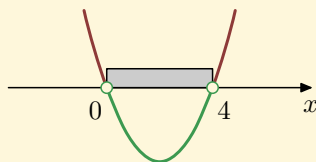
$$x^2 < 4x$$

$$x^2 - 4x < 0$$

$$x(x - 4) < 0$$

$$x = 0 \quad \text{lub} \quad x - 4 = 0$$

$$x = 4$$



Odp. $x \in (0, 4)$

b) Ze zbioru rozwiązań tej nierówności wybierz i wypisz wszystkie liczby naturalne.

Odp. Liczby naturalne należące do zbioru $x \in (0, 4)$ to 1, 2, 3.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



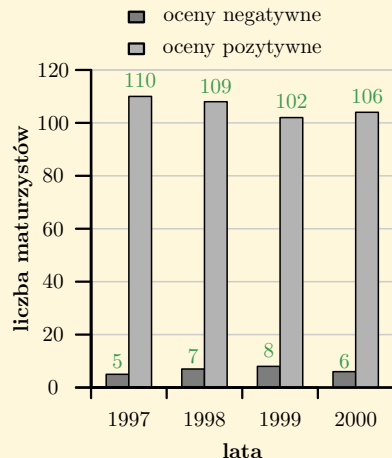
matma235@o2.pl

▷ Zadanie 2 (5 pkt)

Obok na wykresie, pokazano wyniki egzaminu maturalnego z matematyki w pewnej szkole, w ciągu ostatnich 4 lat.

Korzystając z tych danych:

- odczytaj i zapisz, w którym roku maturę z matematyki zdawało najwięcej uczniów. Ile ich było?
- oblicz, ile procent uczniów zdało maturę z matematyki w 2000 roku,
- oblicz, ile procent uczniów nie zdało matury z matematyki w ciągu całego omawianego okresu 4 lat.



Rozwiązanie:

- a) odczytaj i zapisz, w którym roku maturę z matematyki zdawało najwięcej uczniów. Ile ich było?

w 1997 r. $5+110=115$

w 1998 r. $7+109=116$

w 1999 r. $8+102=110$

w 2000 r. $6+106=112$

Odp. Najwięcej osób zdawało maturę w 1998 roku i było ich wtedy 116.

dalej



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

b) oblicz, ile procent uczniów zdało maturę z matematyki w 2000 roku.

6 osób nie zdało matury w 2000 r.

106 osób zdało

procent osób jakie zdało maturę:

$$\frac{106}{6 + 106} \cdot 100\% = \frac{106}{112} \cdot 100\% = 0,9464 \cdot 100\% = 94,64\%$$

Odp. W 2000 r. 94,64% osób zdało maturę.

c) oblicz, ile procent uczniów nie zdało matury z matematyki w ciągu całego omawianego okresu 4 lat.

$$5 + 7 + 8 + 6 = 26$$

tylko osób nie zdało matury w ciągu tych 4 lat

$$110 + 109 + 102 + 106 = 427$$

tylko osób zdało

procent osób jaki nie zdało matury:

$$\frac{26}{26 + 427} \cdot 100\% = \frac{26}{453} \cdot 100\% = 0,0574 = 5,74\%$$

Odp. W ciągu całej 4 lat 5,74% osób nie zdało matury.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



▷ Zadanie 3 (3 pkt)

Cena pewnego towaru wraz z 7% stawką podatku VAT była równa 64,20 złotych. Oblicz cenę tego towaru, gdyby stawka podatku VAT była równa 22% zamiast 7%.

Rozwiązanie:

Na początku obliczymy ile wynosi cena towaru bez VAT'u.

x – cena bez VAT'u

$x + 7\% \cdot x$ – cena z VAT'em

$$x + 7\% \cdot x = 64,20$$

$$x + 0,07 \cdot x = 64,20$$

$$1,07 \cdot x = 64,20 \quad / : 1,07$$

$$x = 60$$

22% VAT'u wynosi:

$$22\% \cdot 60 = 1,22 \cdot 60 = 13,2$$

$$60 + 13,2 = 73,2$$

Odp. Cena z 22% VAT'em wynosi 73,20 zł.

▷ Zadanie 4 (3 pkt)

Aby obliczyć odsetki od kapitału bankowcy stosują następujący wzór:

$$\text{odsetki} = \text{liczba dni lokaty} \cdot \frac{\text{kapitał} \cdot \text{oprocentowanie}}{\text{liczba dni w roku}}$$

UWAGA: W zależności od banku przyjmuje się, że liczba dni w roku równa się 360 albo 365.
Notując się wówczas odsetki_{360} albo odsetki_{365} .

Disponujesz kapitałem 10 000 złotych, które chciałbyś ulokować na 60 dni. W dwóch bankach oprocentowanie jest takie samo i równa się 15%, zaś liczbę dni w roku jeden bank przyjmuje jako 360, drugi jako 365.

Stosując powyższy wzór oblicz odsetki od podanego kapitału w każdym z tych banków. Która lokata jest korzystniejsza i o ile złotych?

Rozwiązanie:

$$\text{odsetki}_{360} = 60 \cdot \frac{10000 \cdot 15\%}{360} = 60 \cdot \frac{10000 \cdot 0,15}{360} = 250$$

$$\text{odsetki}_{365} = 60 \cdot \frac{10000 \cdot 15\%}{365} = 60 \cdot \frac{10000 \cdot 0,15}{365} = 246,58$$

Odp. Korzystniejsza jest lokata w banku, który przyjmuje, że liczba dni w roku równa się 360. Zyskujemy wtedy 3,42 zł.

spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



▷ Zadanie 5 (3 pkt)

W pewnym barze jeden pączek kosztuje p złotych, zaś jeden napój n złotych. Za 4 pączki i 5 napojów zapłacimy w tym barze 11,55 złotych.

- Zapisz za pomocą równania koszt 4 pączków i 5 napojów w tym barze.
- Oblicz, ile zapłacimy w tym barze za 1 napój, jeśli jeden pączek kosztuje 1,20 złotych.

Rozwiązanie:

- Zapisz za pomocą równania koszt 4 pączków i 5 napojów w tym barze.

$$4p + 5n = 11,55$$

- Oblicz, ile zapłacimy w tym barze za 1 napój, jeśli jeden pączek kosztuje 1,20 złotych.

$$4 \cdot 1,20 + 5n = 11,55$$

$$4,8 + 5n = 11,55$$

$$5n = 11,55 - 4,8$$

$$5n = 6,75 \quad / : 5$$

$$n = 1,35$$

Odp. W barze zapłacimy 1,35 zł za 1 napój.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

▷ Zadanie 6 (3 pkt)

W poniższej tabelce pokazano kurs sprzedaży marki niemieckiej w dniu 30.01.2001 r. w wybranych 50 kantorach w naszym kraju.

Kurs sprzedaży (w złotych)	1,99	2,01	2,02	2,05
Liczba kantorów	30	15	3	2

- Uwzględniając podane liczby kantorów, oblicz średni kurs sprzedaży marki niemieckiej w tym dniu.
- Podaj liczbę kantorów, w których tego dnia kurs sprzedaży marki niemieckiej był niższy od obliczonego średniego kursu sprzedaży.

Rozwiązanie:

- Uwzględniając podane liczby kantorów, oblicz średni kurs sprzedaży marki niemieckiej w tym dniu.

$$\begin{aligned} a &= \frac{30 \cdot 1,99 + 15 \cdot 2,01 + 3 \cdot 2,02 + 2 \cdot 2,05}{30 + 15 + 3 + 2} = \\ &= \frac{59,7 + 30,15 + 6,06 + 4,1}{50} = \frac{100,01}{50} \approx 2 \end{aligned}$$

Odp. Średni kurs marki w tym dniu wynosił 2 zł.

- Podaj liczbę kantorów, w których tego dnia kurs sprzedaży marki niemieckiej był niższy od obliczonego średniego kursu sprzedaży.

Odp. W 30 kantorach kurs był niższy od 2 zł.



matma235@o2.pl

▷ Zadanie 7 (3 pkt)

Pewna firma specjalizująca się w kopaniu studni, oferuje klientom następujący sposób obliczenia kosztu robót ziemnych:

wykopanie pierwszego metra głębokości studni kosztuje 300 złotych, zaś wykopanie każdego następnego metra głębokości kosztuje o 30 złotych więcej niż poprzedniego metra. Sprawdź, czy 7500 złotych wystarczy, aby zapłacić tej firmie za wydrążenie studni o głębokości 15 metrów.

Rozwiązanie:

tyle kosztuje wykopanie kolejnych metrów:

$$300, 330, 360, \dots$$

jak widać ceny tworzą **ciąg arytmetyczny** o którym

$a_1 = 300$ – pierwszy wyraz

$r = 30$ – różnica ciągu

wyraz ogólny:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

$$a_n = 300 + (n - 1) \cdot 30$$

koszt wydrążenia 15 metrowej studni to **suma** 15 początkowych wyrazów tego ciągu

$$S_{15} = \frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15$$

$$a_{15} = 300 + (15 - 1) \cdot 30 = 300 + 420 = 720$$

$$S_{15} = \frac{300 + 720}{2} \cdot 15 = 510 \cdot 15 = 7650$$

Odp. Kwota 7500 zł nie wystarczy na wydrążenie studni.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



▷ Zadanie 8 (4 pkt)

Ciąg liczbowy (a_n) jest określony wzorem $a_n = n + n^2$. Wykaż, że jest to ciąg rosnący.

Rozwiązanie:

Ciąg jest **rosnący**, jeżeli dla każdego n naturalnego

$$a_{n+1} - a_n > 0$$

$$a_n = n + n^2$$

$$a_{n+1} = n + 1 + (n + 1)^2 \stackrel{▷}{=} n + 1 + n^2 + 2n + 1 = n^2 + 3n + 2$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= n^2 + 3n + 2 - (n + n^2) = \\ &= n^2 + 3n + 2 - n - n^2 = \\ &= 2n + 2 > 0 \text{ dla każdego } n \text{ naturalnego} \end{aligned}$$

Odp. Wykazaliśmy, że $a_{n+1} - a_n > 0$ dla każdego n naturalnego, zatem ciąg jest rosnący.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

▷ Zadanie 9 (3 pkt)

Wierzchołkami trójkąta ABC są punkty $A(-3, -4)$, $B(-2, 1)$, $C(3, 0)$.

- Sprawdź, że $|AB| = |BC|$.
- Uzasadnij, że kąt ABC jest kątem prostym.

Rozwiązanie:

- Sprawdź, że $|AB| = |BC|$.

Obliczamy odległości między punktami $A = (-3, -4)$ i $B = (-2, 1)$

$$|AB| = \sqrt{(-2 - (-3))^2 + (1 - (-4))^2} = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$$

Obliczamy odległości między punktami $B = (-2, 1)$ i $C = (3, 0)$

$$|BC| = \sqrt{(3 - (-2))^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}$$

$$|AB| = |BC|$$

dalej



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

b) Uzasadnij, że kąt ABC jest kątem prostym.

Trójkąt ABC jest prostokąty, jeżeli boki spełniają **twierdzenie Pitagorasa**:

$$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$$

Obliczamy odległości między punktami $A = (-3, -4)$ i $C = (3, 0)$

$$|AC| = \sqrt{(3 - (-3))^2 + (0 - (-4))^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$$

$$\begin{aligned}(\sqrt{26})^2 + (\sqrt{26})^2 &= (\sqrt{52})^2 \\ 26 + 26 &= 52 \\ 52 &= 52\end{aligned}$$

Odp. Boki trójkąta spełniają twierdzenie Pitagorasa, zatem kąt ABC jest kątem prostym.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



▷ Zadanie 10 (3 pkt)

Na okręgu dany jest zbiór 5 różnych punktów. Ile jest różnych wielokątów, których wierzchołki należą do danego zbioru? (Wielokąty są różne, jeżeli różnią się przynajmniej jednym wierzchołkiem.)

Rozwiązanie:

tyle trójkątów możemy wybrać z 5 punktów:

$$N_1 = \binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{2! \cdot 3!} = \frac{20}{2} = 10$$

tyle czworokątów możemy wybrać z 5 punktów:

$$N_2 = \binom{5}{4} = \frac{5!}{(5-4)! \cdot 4!} = \frac{4! \cdot 5}{1! \cdot 4!} = \frac{5}{1} = 5$$

z 5 punktów możemy wybrać 1 pięciokąt.

$$10 + 5 + 1 = 16$$

Odp. Z 5 punktów możemy ułożyć 16 różnych wielokątów.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

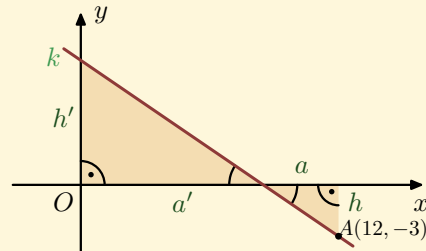
▷ Zadanie 11 (3 pkt)

Na rysunku powyżej, prosta k przechodzi przez punkt $A(12, -3)$. Wiedząc, że stosunek pól obu zakreślonych trójkątów jest równy 4:

- oblicz sumę pól tych trójkątów,
- wyznacz równanie prostej k .

Rozwiązanie:

- oblicz sumę pól tych trójkątów



Trójkąty są podobne, ponieważ mają takie same kąty. Stosunek pól trójkątów podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa.

$$p^2 = 4$$

$$p = 2$$

$$h = 3$$

$$h' = 2 \cdot h$$

$$h' = 6$$

$$a' = 2 \cdot a$$

$$a + a' = 12$$

$$a + 2a = 12$$

$$3a = 12 \quad / : 3$$

$$a = 4$$

$$a' = 2 \cdot 4 = 8$$

polu trójkątów:

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot a' \cdot h'$$

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24$$

suma pól trójkątów:

$$P = P_1 + P_2 = 6 + 24 = 30$$

dalej



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

b) wyznaczyć równanie prostej k .

$$y = ax + b$$

$a' = 8$ zatem funkcja ma **miejsce zerowe** $x_0 = 8$.

$$0 = a \cdot 8 + b$$

Prosta zawiera punkt $A = (12, -3)$

$$-3 = a \cdot 12 + b$$

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 8 + b \\ -3 = a \cdot 12 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -8a \\ -3 = 12a - 8a \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -8a \\ 4a = -3 \quad / : 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -8 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = 6 \\ a = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Odp. Prosta ma równanie $y = -\frac{3}{4}x + 6$.



▷ **Zadanie 12** (5 pkt)

Sprawdź, czy funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x(x-1)(x-2)}{x^2-3x+2} & \text{dla } x \neq 1 \text{ i } x \neq 2 \\ 1 & \text{dla } x = 1 \\ 3 & \text{dla } x = 2 \end{cases}$$

jest ciągła w punktach $x = 1$ i $x = 2$. Sformułuj odpowiedź.

▷ **Zadanie 13** (3 pkt)

Niech Ω będzie zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych i $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$. Oblicz $P(A \cap B)$ wiedząc, że $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$, $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B') = \frac{3}{4}$. Sprawdź, czy zdarzenia A i B są zdarzeniami niezależnymi?

▷ **Zadanie 14** (4 pkt)

Odcinek $\overline{CD}$ jest obrazem odcinka $\overline{AB}$ w jednokładności o skali $k < 0$. Wiedząc, że $A(-2, 0)$, $B(0, -2)$, $C(3, 4)$, $D(7, 0)$ wyznacz:

- równanie prostej przechodzącej przez punkt A i jego obraz w tej jednokładności,
- równanie prostej przechodzącej przez punkt B i jego obraz w tej jednokładności,
- współrzędne środka tej jednokładności.

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień





▷ **Zadanie 15** (5 pkt)

Dane są funkcje f , g i h określone wzorami: $f(x) = 2^x$, $g(x) = -x$, $h(x) = x - 2$, $x \in \mathbf{R}$.

- Naszkicuj wykres funkcji f .
- Wyznacz wzór i naszkicuj wykres funkcji $f \circ g$.
- Wyznacz wzór i naszkicuj wykres funkcji $h \circ f \circ g$.

▷ **Zadanie 16** (5 pkt)

Zawierając w kolekturze Toto-Lotka jeden zakład w grze „Expres-Lotek” zakreślamy 5 spośród 42 liczb. Oblicz prawdopodobieństwo trafienia co najmniej 4 spośród 5 wylosowanych liczb. Wynik podaj w zaokrągleniu do 0,00001.

▷ **Zadanie 17** (5 pkt)

Rozwiąż równanie $2 \cos^2 x + 5 \sin x - 4 = 0$.

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień





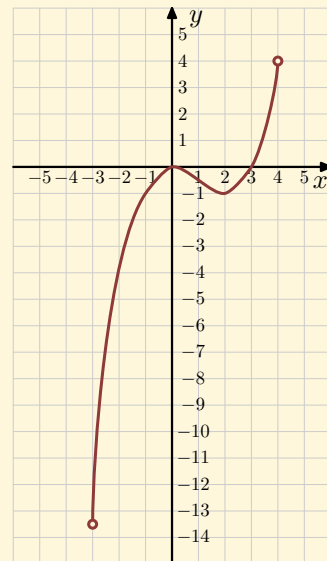
▷ Zadanie 18 (5 pkt)

W tabeli podane są wartości funkcji $f : (-3, 4) \rightarrow \mathbf{R}$ dla trzech argumentów.

x	-2	0	3
$f(x)$	$3\frac{5}{8}$	$\frac{5}{8}$	-1

Rysunek przedstawia wykres pochodnej funkcji f .

- Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej $x = 0$.
- Wyznacz ekstremum funkcji f . Podaj argument, dla którego funkcja f osiąga ekstremum.
- Podaj najmniejszą wartość funkcji f .





▷ **Zadanie 19** (4 pkt)

Funkcja f jest funkcją wykładniczą. Określ liczbę rozwiązań równania $f(x - 1) = m$ w zależności od wartości parametru m . Odpowiedź uzasadnij.

▷ **Zadanie 20** (6 pkt)

Udowodnij stosując zasadę indukcji matematycznej, że dla każdego całkowitego, dodatniego n zachodzi równość:

$$2 + 5 + 8 + \dots + (3n - 1) = \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

▷ **Zadanie 21** (8 pkt)

W trójkącie ABC dane są: $|\overline{AC}| = 8$, $|\overline{BC}| = 3$, $|\angle ACB| = 60^\circ$. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej bryły powstałej po obrocie trójkąta ABC dookoła boku $\overline{BC}$.

▷ **Zadanie 22** (10 pkt)

Rozwiąż równanie $\log_3(\log_9 x) = \log_9(\log_3 x)$.

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień





Zadanie 12 (5 pkt)

Sprawdź, czy funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x(x-1)(x-2)}{x^2-3x+2} & \text{dla } x \neq 1 \text{ i } x \neq 2 \\ 1 & \text{dla } x = 1 \\ 3 & \text{dla } x = 2 \end{cases}$$

jest ciągła w punktach $x = 1$ i $x = 2$. Sformułuj odpowiedź.

Rozwiązanie:

Funkcja jest ciągła w x_0 jeżeli ma skończoną granicę w x_0 oraz

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

Dla $x \neq 1$ i $x \neq 2$:

$$\frac{x(x-1)(x-2)}{x^2-3x+2} = \frac{x(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} = x$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1 = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x = 2 \neq f(2) = 3$$

Odp. Dla $x = 1$ funkcja jest ciągła, a dla $x = 2$ nie jest ciągła.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$x^2 - 3x + 2$$

postać iloczynowa

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{1} = 1$$

$$x_1 = \frac{-(-3) - 1}{2 \cdot 1} = \frac{3 - 1}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-(-3) + 1}{2 \cdot 1} = \frac{3 + 1}{2} = 2$$

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zadanie 13 (3 pkt)

Niech Ω będzie zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych i $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$. Oblicz $P(A \cap B)$ wiedząc, że $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$, $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B') = \frac{3}{4}$. Sprawdź, czy zdarzenia A i B są zdarzeniami niezależnymi?

Rozwiązanie:

Korzystamy z następujących własności prawdopodobieństwa:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \qquad P(B') = 1 - P(B)$$

$$P(B') = 1 - P(B)$$

$$\frac{3}{4} = 1 - P(B)$$

$$P(B) = 1 - \frac{3}{4}$$

$$P(B) = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = \frac{4}{8} + \frac{2}{8} - \frac{5}{8}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{8}$$

Zdarzenia $A, B \subset \Omega$ są niezależne jeżeli:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = P(A \cap B)$$

Odp. Zdarzenia A i B są niezależne.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zadanie 14 (4 pkt)

Odcinek $\overline{CD}$ jest obrazem odcinka $\overline{AB}$ w jednokładności o skali $k < 0$. Wiedząc, że $A(-2, 0)$, $B(0, -2)$, $C(3, 4)$, $D(7, 0)$ wyznacz:

- równanie prostej przechodzącej przez punkt A i jego obraz w tej jednokładności,
- równanie prostej przechodzącej przez punkt B i jego obraz w tej jednokładności,
- współrzędne środka tej jednokładności.

Rozwiązanie:

- a) równanie prostej przechodzącej przez punkt A i jego obraz w tej jednokładności czyli punkt D

$$y = 0$$

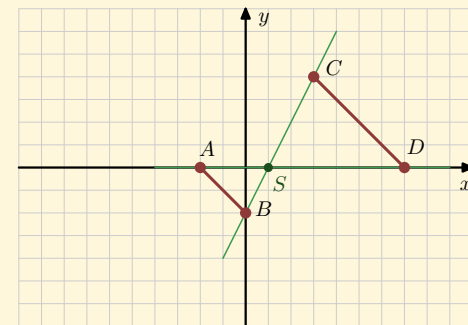
- b) równanie prostej przechodzącej przez punkt B i jego obraz w tej jednokładności czyli punkt C

$$y = 2x - 2$$

- c) współrzędne środka tej jednokładności.

Środek jednokładności S to punkt przecięcia się prostych $y = 0$ i $y = 2x - 2$.

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = 2x - 2 \end{cases}$$



dalej



$$\begin{aligned}0 &= 2x - 2 \\ -2x &= -2 \quad / : (-2) \\ x &= 1\end{aligned}$$

Odp. Środek jednokładności S ma współrzędne $(1, 0)$.

spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwietnia



matma235@o2.pl

równanie prostej przechodzącej przez punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2)

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)(x - x_1) = 0$$

Dla punktów $B(0, -2)$ i $C(3, 4)$

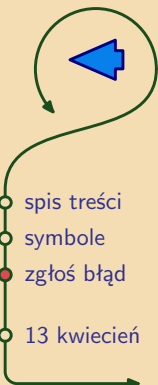
$$(y - (-2))(3 - 0) - (4 - (-2))(x - 0) = 0$$

$$(y + 2) \cdot 3 - 6x = 0$$

$$3y + 6 - 6x = 0$$

$$3y = 6x - 6 \quad / : 3$$

$$y = 2x - 2$$

- 
- spis treści
 - symbole
 - zgłoś błąd
 - 13 kwiecień





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

▷ Zadanie 15 (5 pkt)

Dane są funkcje f , g i h określone wzorami: $f(x) = 2^x$, $g(x) = -x$, $h(x) = x - 2$, $x \in \mathbf{R}$.

- Naszkicuj wykres funkcji f .
- Wyznacz wzór i naszkicuj wykres funkcji $f \circ g$.
- Wyznacz wzór i naszkicuj wykres funkcji $h \circ f \circ g$.

Rozwiązanie:

- Naszkicuj wykres funkcji f .

$$f(x) = 2^x$$

wykres

- Wyznacz wzór i naszkicuj wykres funkcji $f \circ g$.

$$f \circ g = f(g(x)) = f(-x) = 2^{-x}$$

wykres

- Wyznacz wzór i naszkicuj wykres funkcji $h \circ f \circ g$.

$$h \circ f \circ g = h(f(g(x))) = h(f(-x)) = h(2^{-x}) = 2^{-x} - 2$$

wykres



spis treści

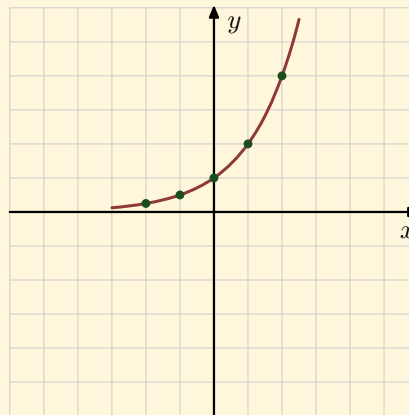
symbole

zgłoś błąd

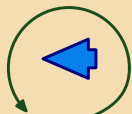
13 kwiecień



x	-2	-1	0	1	2
$y = 2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4



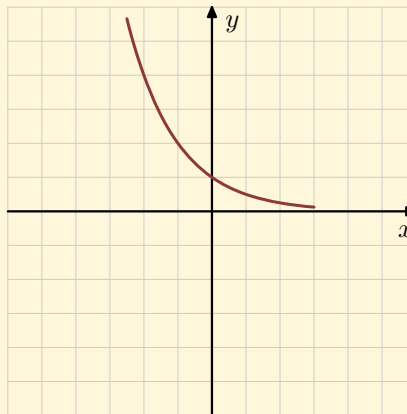
matma235@o2.pl



- o spis treści
- o symbole
- zgłoś błąd
- o 13 kwiecień



Wykres $y = 2^{-x}$ powstaje przez odbicie $y = 2^x$ względem osi OY .





spis treści

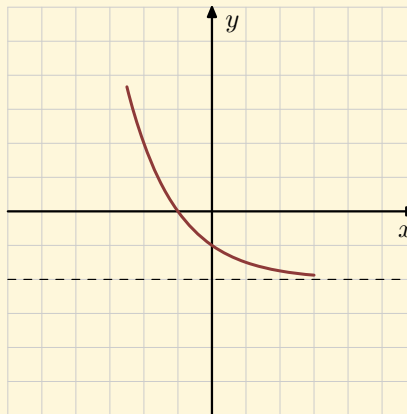
symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



Wykres $y = 2^{-x} - 2$ powstaje przez przesunięcie $y = 2^{-x}$ o 2 w dół.





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

▷ Zadanie 16 (5 pkt)

Zawierając w kolekturze Toto-Lotka jeden zakład w grze „Expres-Lotek” zakreślamy 5 spośród 42 liczb. Oblicz prawdopodobieństwo trafienia co najmniej 4 spośród 5 wylosowanych liczb. Wynik podaj w zaokrągleniu do 0,00001.

Rozwiązanie:

na tyle sposobów możemy wylosować 5 liczb z 42:

$$\overline{\Omega} = \binom{42}{5} = \frac{42!}{(42-5)! \cdot 5!} = \frac{37! \cdot 38 \cdot 39 \cdot 40 \cdot 41 \cdot 42}{37! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{102080160}{120} = 850668$$

na tyle sposobów możemy wybrać 5 liczb, tak aby 4 pochodziły z 5 wygrywających liczb, a jedna pochodziła z tych $42-5=37$ liczb, które nie trafiły do zestawu 5 liczb wygrywających:

$$\overline{A} = \binom{5}{4} \binom{37}{1} = \frac{5!}{(5-4)! \cdot 4!} \cdot \frac{37!}{(37-1)! \cdot 1!} = \frac{4! \cdot 5}{1 \cdot 4!} \cdot \frac{36! \cdot 37}{36! \cdot 1} = 5 \cdot 37 = 185$$

jeżeli liczymy prawdopodobieństwo trafienia **co najmniej** 4 spośród 5 wylosowanych liczb, to musimy wziąć pod uwagę zdarzenie trafienia 5 spośród 5 wylosowanych liczb, a takie zdarzenie może zajść tylko na 1 sposób:

$$\overline{\overline{B}} = 1$$

szukane prawdopodobieństwo:

$$P(A) = \frac{\overline{A} + \overline{\overline{B}}}{\overline{\Omega}} = \frac{185 + 1}{850668} \approx 0,00022$$

Odp. Prawdopodobieństwo trafienia 4 liczb w grze „Expres-Lotek” wynosi $P(A) \approx 0,00022$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zadanie 17 (5 pkt)

Rozwiąż równanie $2 \cos^2 x + 5 \sin^2 x - 4 = 0$.

Rozwiązanie:

$$2 \cos^2 x + 5 \sin x - 4 = 0$$

$$2(1 - \sin^2 x) + 5 \sin x - 4 = 0 \quad \triangleright$$

$$2 - 2 \sin^2 x + 5 \sin x - 4 = 0$$

$$-2 \sin^2 x + 5 \sin x - 2 = 0$$

niech $t = \sin x$

$$-2t^2 + 5t - 2 = 0$$

równanie kwadratowe

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-2) = 25 - 16 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$$

$$t_1 = \frac{-5 - 3}{2 \cdot (-2)} = \frac{-8}{-4} = 2$$

$$t_1 = \frac{-5 + 3}{2 \cdot (-2)} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = 2$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

nie ma rozwiązania

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \triangleright \quad \triangleright \quad \triangleright$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

Odp. $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ dla $k \in \mathbb{C}$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zadanie 18 (5 pkt)

W tabeli podane są wartości funkcji $f : (-3, 4) \rightarrow \mathbf{R}$ dla trzech argumentów.

x	-2	0	3
$f(x)$	$3\frac{5}{8}$	$\frac{5}{8}$	-1

Rozwiązanie:

Rysunek przedstawia wykres pochodnej funkcji f .

- a) Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej $x = 0$.

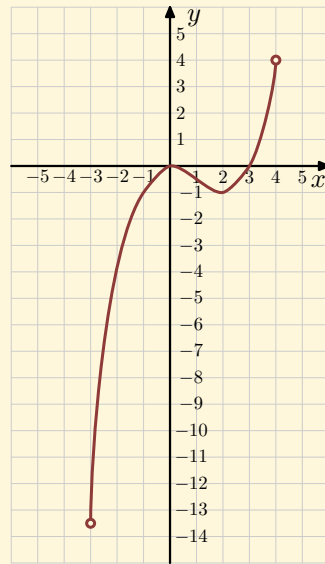
$$y = \frac{5}{8}$$

- b) Wyznacz ekstremum funkcji f . Podaj argument, dla którego funkcja f osiąga ekstremum.

$$\text{Funkcja dla } x = 3 \text{ ma minimum } f(3) = -1$$

- c) Podaj najmniejszą wartość funkcji f .

$$\text{Najmniejsza wartość funkcji } y_{\min} = -14$$





spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

a) Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej $x = 0$.

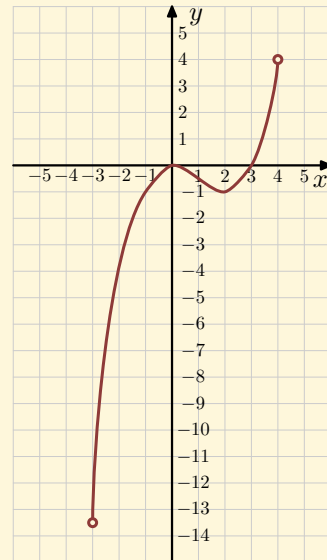
x	-2	0	3
$f(x)$	$3\frac{5}{8}$	$\frac{5}{8}$	-1

styczna do wykresu

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Z wykresu pochodnej odczytujemy, że dla $x_0 = 0$ pochodna $f'(0) = 0$, a z tabelki $f(0) = \frac{5}{8}$.

$$y - \frac{5}{8} = 0 \cdot (x - 0)$$
$$y = \frac{5}{8}$$





spis treści

symbole

zgłoś błąd

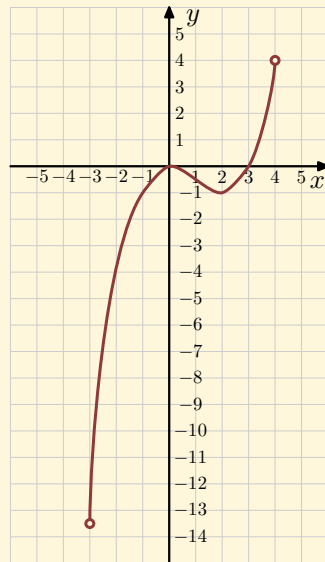
13 kwiecień



matma235@o2.pl

b) Wyznacz ekstremum funkcji f . Podaj argument, dla którego funkcja f osiąga ekstremum.

x	-2	0	3
$f(x)$	$3\frac{5}{8}$	$\frac{5}{8}$	-1



x	$(-3, 0)$	0	$(0, 3)$	3	$(3, 4)$
$f'(x)$	$- \triangleright$	0	$- \triangleright$	0	$+ \triangleright$
$f(x)$	$\searrow$	$\frac{5}{8}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

Z tabelki wynika, że funkcja ma dla $x = 3$ **minimum** równe $f(3) = -1$.



c) Podaj najmniejszą wartość funkcji f .

x	$(-3, 0)$	0	$(0, 3)$	3	$(3, 4)$
$f'(x)$	$- ▷$	0	$- ▷$	0	$+ ▷$
$f(x)$	$\searrow$	$\frac{5}{8}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

Z tabelki wynika, że w przedziale $(-3, 3)$ funkcja maleje, a w $(3, 4)$ rośnie. Zatem minimalną wartość funkcja ma dla $x = 3$ i wynosi ona $y_{min} = -1$.



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



▷ Zadanie 19 (4 pkt)

Funkcja f jest funkcją wykładniczą. Określ liczbę rozwiązań równania $f(x - 1) = m$ w zależności od wartości parametru m . Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie:

funkcja wykładnicza

$$f(x - 1) = m$$

$$a^{x-1} = m \quad a > 0 \quad a \neq 1$$

$$a^x \cdot a^{-1} = m$$

$$a^x \cdot \frac{1}{a} = m \quad / \cdot a$$

$$a^x = m \cdot a$$

Funkcja wykładnicza $y = a^x$ jest **różnowartościowa** i przyjmuje wartości w przedziale $(0, \infty)$, dlatego dla $a > 0$ i $m \in (0, \infty)$ równanie ma jedno rozwiązanie, a dla $m \in (-\infty, 0)$ równanie nie ma rozwiązań.



- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zadanie 20 (6 pkt)

Udowodnij stosując zasadę indukcji matematycznej, że dla każdego całkowitego, dodatniego n zachodzi równość:

$$2 + 5 + 8 + \dots + (3n - 1) = \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

Rozwiązanie:

1. Dla $n = 1$

$$\begin{aligned} 2 + 5 + 8 + \dots + (3 \cdot 1 - 1) &= \frac{3}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \\ 2 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \\ 2 &= 2 \end{aligned}$$

równanie jest prawdziwe.

2. Załóżmy, że równanie jest prawdziwe dla liczby k

$$2 + 5 + 8 + \dots + (3k - 1) = \frac{3}{2}k^2 + \frac{1}{2}k$$

3. Korzystając z założenia udowodnimy, że jest ono prawdziwe dla $k + 1$

$$2 + 5 + 8 + \dots + (3k - 1) + (3(k + 1) - 1) = \frac{3}{2}(k + 1)^2 + \frac{1}{2}(k + 1)$$

$$\begin{aligned} 2 + 5 + 8 + \dots + (3k - 1) + (3(k + 1) - 1) &= \\ \text{korzystamy z założenia} & \\ = \frac{3}{2}k^2 + \frac{1}{2}k + (3(k + 1) - 1) &= \\ = \frac{3}{2}k^2 + \frac{1}{2}k + 3k + 2 &= \\ = \frac{3}{2}k^2 + 3k + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}k + \frac{1}{2} &= \end{aligned}$$

dalej



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$\begin{aligned} &= \frac{3}{2}k^2 + 3k + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}k + \frac{1}{2} = \\ &= \frac{3}{2}(k^2 + 2k + 1) + \frac{1}{2}(k + 1) = \triangleright \\ &= \frac{3}{2}(k + 1)^2 + \frac{1}{2}(k + 1) \end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$2 + 5 + 8 + \dots + (3k - 1) + (3(\textcolor{teal}{k} + 1) - 1) = \frac{3}{2}(k + 1)^2 + \frac{1}{2}(k + 1)$$

Udowodniliśmy, że jeżeli równanie

$$2 + 5 + 8 + \dots + (3n - 1) = \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

jest prawdziwe dla liczby k , to jest ono prawdziwe dla $k + 1$. Oznacza to, że jeżeli jest prawdziwe dla 2, to jest ono prawdziwe dla wszystkich liczb naturalnych.



spis treści
symbole
zgłoś błąd
13 kwiecień

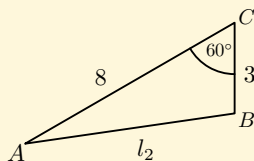


matma235@o2.pl

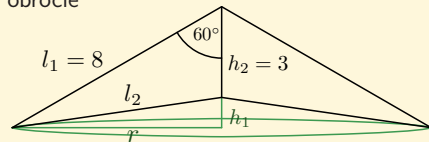
Zadanie 21 (8 pkt)

W trójkącie ABC dane są: $|\overline{AC}| = 8$, $|\overline{BC}| = 3$, $|\angle ACB| = 60^\circ$. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej bryły powstałej po obrocie trójkąta ABC dookoła boku $\overline{BC}$.

Rozwiązanie:



po obrocie



Po obrocie trójkąta powstał duży stożek (promień – r , wysokość – $h_1 + h_2$), z którego wycięto mniejszy stożek (promień – r , wysokość – h_1).

wysokość: $h_1 = 1$
promień: $r = 4\sqrt{3}$
bok $\overline{AB}$: $l_2 = 7$

Objętość całej bryły to różnica objętości dwóch stożków

$$\begin{aligned}V &= V_1 - V_2 \\V &= \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot (h_1 + h_2) - \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h_1 \\V &= \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot (h_1 + h_2 - h_1) \\V &= \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h_2 \\V &= \frac{1}{3} \cdot \pi (4\sqrt{3})^2 \cdot 3 \\V &= \pi \cdot 16 \cdot 3 = 48\pi\end{aligned}$$

dalej

Pole całej bryły to suma pól bocznych dwóch stożków

$$P_b = P_{b1} + P_{b2}$$

$$P_b = \pi r l_1 + \pi r l_2$$

$$P_b = \pi \cdot 4\sqrt{3} \cdot 8 + \pi \cdot 4\sqrt{3} \cdot 7$$

$$P_b = 32\sqrt{3}\pi + 28\sqrt{3}\pi$$

$$P_b = 60\sqrt{3}\pi$$

spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl



spis treści

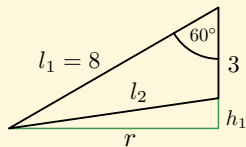
symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl



$$\triangleright \sin 60^\circ = \frac{r}{8}$$

$$\triangleright \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{r}{8} \quad / \cdot 8$$

$$\frac{8\sqrt{3}}{2} = r$$

$$r = 4\sqrt{3}$$

$$\triangleright \cos 60^\circ = \frac{h_1 + 3}{8}$$

$$\triangleright \frac{1}{2} = \frac{h_1 + 3}{8} \quad / \cdot 8$$

$$4 = h_1 + 3$$

$$h_1 = 1$$

twierdzenie Pitagorasa

$$r^2 + h_1^2 = l_2^2$$

$$(4\sqrt{3})^2 + 1^2 = l_2^2$$

$$48 + 1 = l_2^2$$

$$l_2 = \sqrt{49} = 7$$

$$l_2 = 7$$



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

Zadanie 22 (10 pkt)

Rozwiąż równanie $\log_3(\log_9 x) = \log_9(\log_3 x)$.

Rozwiązanie:

logarytm

logarytmować możemy tylko liczby dodatnie

$$x > 0$$

$$\log_9 x > 0$$

$$\log_3 x > 0$$

$$D = (1, \infty)$$

sprowadzamy **logarytmy** do jednakowej podswawy, a następnie korzystając z **różnowartościowości** funkcji logarytmicznej, opuszczamy je.

$$\log_3(\log_9 x) = \log_9(\log_3 x)$$

$$\log_3(\log_9 x) = \frac{\log_3(\log_3 x)}{\log_3 9} \triangleright$$

$$\log_3(\log_9 x) = \frac{\log_3(\log_3 x)}{2} \quad / \cdot 2$$

$$2 \log_3(\log_9 x) = \log_3(\log_3 x)$$

$$\log_3(\log_9 x)^2 = \log_3(\log_3 x)$$

$$\log_9^2 x = \log_3 x$$

$$\left(\frac{\log_3 x}{\log_3 9} \right)^2 = \log_3 x \triangleright$$

dalej



spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



$$\left(\frac{\log_3 x}{\log_3 9}\right)^2 = \log_3 x$$

$$\left(\frac{\log_3 x}{2}\right)^2 = \log_3 x \quad \triangleright$$

$$\frac{\log_3^2 x}{4} = \log_3 x \quad / \cdot 4$$

$$\log_3^2 x = 4 \log_3 x$$

$$\log_3^2 x - 4 \log_3 x = 0$$

$$\log_3 x \cdot (\log_3 x - 4) = 0$$

$$\log_3 x = 0$$

$$\triangleright x = 1$$

$$\log_3 x - 4 = 0$$

$$\log_3 x = 4$$

$$\log_3 x = \log_3 3^4 \quad \triangleright$$

$$x = 81$$

Odp. Jedynym rozwiązaniem należącym do dziedziny rozwiązania $D = (1, \infty)$ jest $x = 81$.

$$x > 0$$

$$\log_9 x > 0$$

$$\log_3 x > 0$$

$$\log_9 x > \log_9 1$$

$$\log_3 x > \log_3 1 \quad \triangleright$$

$$x > 1$$

$$x > 1$$

Dziedziną równania jest część wspólna rozwiązań nierówności

$$D = (1, \infty)$$

spis treści

symbole

zgłoś błąd

13 kwiecień



matma235@o2.pl

▷ **Zadanie 11** (4 pkt)

Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, określonej wzorem $f(x) = (x - 1) \cdot (5 - x)$, w przedziale $\langle 0, 7 \rangle$.

▷ **Zadanie 12** (4 pkt)

Dane jest równanie postaci $a^2 \cdot x - 1 = x + a$, w którym niewiadomą jest x . Zbadaj liczbę rozwiązań tego równania, w zależności od parametru a .

▷ **Zadanie 13** (4 pkt)

Wyznacz te wartości parametru a oraz b , przy których funkcja $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, określona wzorem

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + a}{x - 2} & \text{dla } x \neq 2 \\ b & \text{dla } x = 2 \end{cases}$$

jest ciągła w punkci $x = 2$.

▷ **Zadanie 14** (5 pkt)

Suma n początkowych, kolejnych wyrazów ciągu (a_n) , jest obliczana według wzoru $S_n = n^2 + 3n$, $(n \in \mathbf{N}^+)$. Wyznacz a_n . Wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień





▷ **Zadanie 15** (5 pkt)

Dziesiąty wyraz pewnego ciągu geometrycznego równa się 10. Oblicz iloczyn dziewiętnastu początkowych, kolejnych wyrazów tego ciągu.

▷ **Zadanie 16** (4 pkt)

Rzucamy pięć razy symetryczną kostką sześcienną. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, polegającego na tym, że „jedyńka” wypadnie co najmniej cztery razy.

▷ **Zadanie 17** (5 pkt)

W układzie współrzędnych są dane punkty: $A(-9, -2)$ oraz $B(4, 2)$. Wyznacz współrzędne punktu C , leżącego na osi OY , tak że kąt ACB jest kątem prostym.

▷ **Zadanie 18** (4 pkt)

Wybierz dwie dowolne przekątne sześcianu i oblicz cosinus kąta między nimi. Sporządź odpowiedni rysunek i zaznacz na nim kąt, którego cosinus obliczasz.

▷ **Zadanie 19** (5 pkt)

Trapez równoramienny, o obwodzie równym 20 cm, jest opisany na okręgu. Wiedząc, że przekątna trapezu ma długość $\sqrt{41}$ cm, oblicz pole tego trapezu.

▷ **Zadanie 20** (10 pkt)

Funkcja h jest określona wzorem $h(x) = \log_2(x^2 - 4) - \log_2(x - 5)$. Wyznacz wszystkie wartości parametru k , dla których równanie $h(x) - \log_2 k = 0$ ma dwa różne pierwiastki.

▷ **Zadanie 21** (10 pkt)

Na kuli o promieniu $R = 4$ cm opisujemy stożki o promieniu r i wysokości H . Spośród wszystkich takich stożków wyznacz ten, który ma najmniejszą objętość. Oblicz tę objętość. Oblicz promień i wysokość znalezionej stożka.

- spis treści
- symbole
- zgłoś błąd
- 13 kwiecień

